序

华罗庚教授是我国最早从事数学方法普及工作的数学家。早在1958年，他就倡议在工业生产中推广应用运筹学中的数学方法。他和他的学生越民义、万哲先和王元等到我国运输部门，从事运输问题中的数学方法的普及工作。他和他的学生及其他数学家，一度曾在北京市与山东省组织过群众运动，推广与应用线性规划中的数学方法。但由于这些方法使用范围有限，计算也比较复杂，所以至今在我国，这些方法主要只在少数部门，例如运输部门中推广使用。

1958年，华罗庚就倡议在制订国民经济计划时，使用投入——产出法。他不仅宣讲这一方法，并进行了深入的研究。他还讲授了与这一理论相关的非负元素矩阵理论，并指出某些理论上的重要结果在经济学上的重要意义。

在我国工业部门真正很好地进行普及数学方法的工作，是1965年重新开始的。华罗庚精辟地总结了这些年来从事普及数学方法工作的经验。他提出并解决了普及数学方法的目的、内容及方法，也就是他所说的“三条原则”，即1）为谁？2）什么技术？及3）如何推广？（见“导论”）。首先，建立了普及数学方法小分队，以华罗庚为领导，他的学生陈德泉、计雷为主要队员。华罗庚选择了以改进生产工艺问题为内容的优选法及处理生产组织与管理问题为内容的统筹法作为普及工作的内容。在浩如烟海的应用数学文献中，找出适合在我国这样一个小工厂众多，工业技术水平比较落后的国家中能普及应用的数

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

学方法，而且又要讲得通俗易懂，使我国广大文化程度不高的普通工人都能听懂，能运用，这本身就是非常困难的事。为此，华罗庚撰写了《优选法平话及其补充》与《统筹方法平话及补充》两本科普读物，深受我国广大工人的欢迎。计算起来，他从事普及数学方法所耗去的精力与时间，并不少于他作为第一流的数学家在纯粹数学几个领域进行开辟性研究所耗去的精力与时间。当然，在近二十年来，他仍利用点滴时间从事数学理论工作，对他接触过的应用数学方法，他总是认真研究它们的理论及严格的数学证明。

从 1965 年开始，华罗庚及其小分队到过我国二十多个省、市、自治区的几百个城市，几千个工厂，给几百万工人及技术人员讲课，使他们学会优选法与统筹法，并用于改进他们的工作。小分队每到一个省，立即到一个工厂或矿山所在地。把省内及外省的二百人左右集合起来，举办约一周的学习班。除讲三、四次课外，都是小组讨论。讨论的内容是如何将优选法与统筹法应用于各人自己的工作，或当地的生产过程中去。一周后，即分别奔赴全省各工业单位，与各厂的领导、工人与技术人员结合起来，共同工作。在这个过程中，华罗庚总是轮流到全省各主要城市及工厂中去亲自指导，及时了解一些成功的经验与失败的教训。然后再召集其它城市的代表到某工厂或矿山现场去开会，学习这些经验，以便进一步改进自己的工作。因此，小分队的工作范围和领域很广。每到一个省，常常得到上万项成果，产生了巨大的经济效益，并能在小分队离开后，自己将优选法与统筹法用于以后的工作。当然，普及数学方法的工作能在我国取得这样的成功，与华罗庚本人在我国人民中享有的名望是分不开的。

1980 年，华罗庚教授应 H.O.Pollak 博士的邀请，在第四

届国际数学教育会议及 Bell 实验室作了题为“在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会”的报告。这篇报告加以修订，就是本书的“导论”。以后各章将详细阐述“导论”中提到的各个问题。这一部分是由我协助他共同写成的。投入——产出法由于材料太多，故未收入本书。

我从 1952 年开始，即跟华罗庚教授从事数论研究。数学方法普及工作只参加过少数几次，所以，在我撰写的部分中，难免有疏漏甚至错误之处。由于本书涉及面广，文献繁多，本书只列举了其中有关的少数文献。有兴趣的读者可以查阅有关的文献与专著。

王　元

1982 年 12 月

英文版校订者序

对原稿作了四方面的改动。

1) 由于语言上的障碍，全部手稿都作了改写。修订之处兼顾了英语清晰易懂的需要，以及力求保持原稿特色的目的。文中仍有若干段落还不够明确，编者较难领悟其原意，所以保留了原样。

2) 为了使论著更明了，对定理的公式化、定理的证明和举例，作了若干改动。所有这些改动都忠实于原作思想。

3) 原第一章“物体表面积与体积的近似计算”，决定用华罗庚与王元合写的更为广博的“关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题”论文代替。该文发表在中国的《数学学报》1961 年第 1 期上，由胡·戴德 (Hu Dide) 翻译成英文。该论文收在海·哈贝斯坦 (H.Halberstan) 主编的《华罗庚文选》(斯普林格出版社 Springer Verlag 出版，1983 年) 中。

4) 决定将很短的第十二章“矩阵的广义逆”取消，导论中对此章的一些参考论述也删掉了，因为这一课题与本书其它章节不搭配。由于同样的理由，第二章中的“火箭的发射点与射程”一节，也予取消。

因为原稿没有包含许多现代的与容易理解的参考文献，校订者在每章末增加了一些规范的参考文献。

华罗庚于 1985 年 6 月 12 日在东京逝世。这里收入了海涅·哈贝斯坦 (Heini Halberstan) 写的“悼念华罗庚”一文。

该文最早发表在《数学情报》第 8 卷第 4 期上，后由斯普林格出版社收集出版。

下面是一些关于应用数学在中华人民共和国的现状的参考文献：

Fitzgerald, Anne, and Saunders MacLane (合编)，中华人民共和国的纯粹与应用数学，美国纯粹与应用数学代表团的访问报告。国家科学院，华盛顿，哥伦比亚特区 (Washington D.C.)，1977。

Gina Bari Kolata, “华罗庚形成中国的数学”，《科学》，第 210 卷，1980 年 10 月 24 日。

“管理科学与运筹学在中国”，交叉学科 (Interface)，16：2，1986 年 3~4 月。（其中包括陈德泉、计雷与庞昌民在华罗庚及其小分队中的工作“管理科学在中国的普及”。）

最后，我衷心地感谢 W.F.Lucas 博士与 H.O.Pollak 博士在编校这部手稿时所提供的有益的意见和建议；衷心地感谢 Birkhäuser (Boston) 出版社的 Lauren Cowles 小姐对出版本书的帮助和极大的耐心。

J.G.C.Heijmans

1988 年 8 月

目 录

前言（王元） i

中文版序言（王元） …… 1
感谢（华罗庚） …… 3
序（王元） …… 4
英文版校订者序（J.G.C.Heijmans） …… 7

第〇章 导论 …… 1
§0.1 三个原则 …… 1
§0.2 书本上寻 …… 3
§0.3 车间里找 …… 5
§0.4 优选法（O.S.M.） …… 7
§0.5 分数法 …… 9
§0.6 黄金数与数值积分 …… 10
§0.7 统筹方法（O.P.M.） …… 11
§0.8 统计方法 …… 15
§0.9 结语 …… 19
第一章 关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题 …… 21
§1.1 引言 …… 21
§1.2 矿藏储量计算 …… 23
§1.3 坡地面积计算 …… 31
参考文献 …… 41

第二章 挂轮问题 ………………………………………… 42
§2.1 引言 ………………………………………… 42
§2.2 简单连分数 ………………………………………… 43
§2.3 Farey 贯 ………………………………………… 48
§2.4 问题的算法 ………………………………………… 50
§2.5 挂轮问题的求解 ………………………………………… 52
参考文献 ………………………………………… 56
第三章 优选法（单因素） ………………………………………… 57
§3.1 引言 ………………………………………… 57
§3.2 单峰函数 ………………………………………… 59
§3.3 来回调试法 ………………………………………… 60
§3.4 黄金分割法 ………………………………………… 61
§3.5 定理 3.1 的证明 ………………………………………… 63
§3.6 分数法 ………………………………………… 66
§3.7 定理 3.2 的证明 ………………………………………… 68
§3.8 对分法 ………………………………………… 70
§3.9 抛物线法 ………………………………………… 71
参考文献 ………………………………………… 73
第四章 优选法（多因素） ………………………………………… 75
§4.1 引言 ………………………………………… 75
§4.2 单峰函数（多因素） ………………………………………… 76
§4.3 对开法 ………………………………………… 77
§4.4 旋升法 ………………………………………… 81
§4.5 平行线法 ………………………………………… 82
§4.6 双因素的离散情况 ………………………………………… 84
§4.7 翻筋斗法 ………………………………………… 86
§4.8 最陡上升法 ………………………………………… 88
§4.9 抛物体法 ………………………………………… 89

§ 4.10　凸体 …… 93
§ 4.11　切块法 …… 97
§ 4.12　0—1 变元法 …… 98
参考文献 …… 101
第五章　黄金数与数值积分 …… 102
§ 5.1　引言 …… 102
§ 5.2　若干引理 …… 104
§ 5.3　求积公式的误差估计 …… 107
§ 5.4　求积公式的 Ω 结果和下界 …… 109
§ 5.5　注记 …… 111
参考文献 …… 112
第六章　统筹方法 …… 113
§ 6.1　引言 …… 113
§ 6.2　统筹法（CPM） …… 113
§ 6.3　时差 …… 116
§ 6.4　平行作业与交叉作业 …… 118
§ 6.5　工人配备表 …… 122
参考文献 …… 124
第七章　计划检查评审技术（PERT） …… 125
§ 7.1　引言 …… 125
§ 7.2　概率的估计 …… 126
§ 7.3　计算过程 …… 129
§ 7.4　初等方法 …… 132
§ 7.5　注记 …… 134
参考文献 …… 136
第八章　机器排序 …… 137
§ 8.1　引言 …… 137
§ 8.2　两台机床问题 …… 138

§ 8.3　一条引理 …………………………………… 140
§ 8.4　定理 8.1 的证明 ……………………………… 142
参考文献 ……………………………………………… 143
第九章　运输问题（图上作业法） ………………… 144
§ 9.1　引言 ……………………………………………… 144
§ 9.2　一个圈 …………………………………………… 151
§ 9.3　定理 9.1 的证明 ……………………………… 154
参考文献 ……………………………………………… 155
第十章　运输问题（单纯形方法） ………………… 157
§ 10.1　引言 …………………………………………… 157
§ 10.2　消去变数与允许解 ………………………… 163
§ 10.3　判别数 ………………………………………… 165
§ 10.4　一个最优解的判别法 ……………………… 169
§ 10.5　特征数 ………………………………………… 170
§ 10.6　迭代 …………………………………………… 173
§ 10.7　线性规划 ……………………………………… 176
参考文献 ……………………………………………… 177
第十一章　邮递员问题 ……………………………… 179
§ 11.1　引言 …………………………………………… 179
§ 11.2　Euler 路径 …………………………………… 182
§ 11.3　最优解的一个判别法 ……………………… 183
参考文献 ……………………………………………… 185

悼念华罗庚（H.Halberstan） …………………………… 187
怀念华罗庚（段学复） ………………………………… 191
纪念华罗庚先生（田方增） …………………………… 197

编后记（冯克勤）　202

第〇章　导　论

§0.1　三个原则

从 60 年代中期开始，我和我的助手们到过了我国的二十六个省、市、自治区的几百个城市，几千个工厂，会见了成百万的工人、农民和技术人员。从工作实践中，我们体会到在普及数学方法时，有以下三个原则:

1)“为谁?”或“目的是什么?”

2)“什么技术?”及

3)“如何推广?”

现在，对这三个问题，简述如下。

1)“为谁?”

在专家与群众之间，并不一定有共同语言。要找到共同语言，必须有共同的兴趣。无穷维空间对数学家来说，很引人入胜，但对工人来说，他不关心这点。他希望尽快找出砂轮或锡林（Cylinder 圆辊）的平衡位置。因此，搞普及工作，首先要

找到使讲者与听者都感兴趣的共同目标。有了共同目标，就能为产生共同语言打开道路。这样，才有可能提到问题2)。

2)“什么技术?”

关于这个问题，后面还要详细地讲，现在仅提出选择技术的“三原则”:

a) 群众性。我们提出来的方法，要让有关的群众听得懂，学得会，用得上，见成效。

b) 实践性。每个方法在推广前都要经过实践。通过实践去检验这个方法可以适用的范围，然后在这个范围内进行推广。在实践中曾发现，即使在国外取得成功的方法，原封不动地搬到我国来，往往也不一定能取得预期的成果。

c) 理论性。因为有了理论，才能深入浅出；因为有了理论，才能辨别方法的好坏；因为有了理论，才能创造新的方法。

3)“如何推广?”

我们的经验是亲自下去，从小范围做起。例如，先从一个车间做起。如果一个车间做出成绩，引起了注意，其它车间就会闻风而来，邀请我们前去。如果整个工厂从领导到群众都感兴趣了，那就可以推广到整个工厂，一直到整个城市或整个省。就这样，有时我们要对成十万的听众演讲。演讲的方法是有一个主会场，并设若干个分会场。我们的闭路电视还不普遍，所以在每个分会场都有我的助手负责演示与画图。讲完后，我们不仅要负责答疑，更重要的是到现场去，和大家一起工作实践，务必让讲授的方法在生产中见到效果。

§ 0.2　书本上寻

作为一个学者，往往会到文献中或书本上寻找解决问题的方法，如果能注意分析比较，这样做，不失为一个好方法，可以获得不少经验和教训。例子很多，仅举其中之一。

如何计算山区的表面积？我们在书上找到了两个方法：一个是地质学家常用的 Bayman 方法，另一个是地理学家常用的 Volkov 方法。这两个方法的叙述如下：

从一个画有高程差为 Δh 的等高线地图出发，l_0 是高度为 0 的等高线，l_1 是高度为 Δh 的等高线，l_r 是高度为 $r\Delta h$ 的等高线，…，l_n 是制高点，高度是 h。命 B_i 表示 l_i 与 l_{i+1} 间平面的面积。

1）Bayman 方法:

a）命　$C_i=\frac{1}{2}\ (|l_i|+|l_{i+1}|,$

此处$|l_i|$是等高线 l_i 的长度。

b）命　$B_{a_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}.$

地质学家把 B_{a_n} 看作是这块山地区域的面积值。

2）Volkov方法:

a）命　$l=\sum_{i=0}^{n-1}|l_i|$与$B=\sum_{i=0}^{n-1}B_i.$

b）命　$V_{o_n}=\sqrt{B^2+(l\Delta h)^2}.$

地理学家把 V_{o_n} 看作是这块山地区域的面积值。

这是我们从不同的科学分支找来的两种方法。在我们面前，立刻就出现了两个问题：1）它们是否收敛于真面积？及 2）哪个方法好些？

使人失望的是，两个方法都不收敛于真面积 S，确切地说，命

$$B_a=\lim_{n\to\infty}B_{a_n},\quad V_o=\lim_{n\to\infty}V_{o_n},$$

则得出 $V_o\leqslant B_a\leqslant S$

证明是不难的，但似乎有些趣味。引进柱面极坐标（ρ，θ，z），其中制高点被取作原点。我们把曲面写成为

$$\rho=\rho(z,\ \theta)\ ,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

这也是高度为 Z 的等高线方程，则习知

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,d\theta dz.$$

引进复值函数

$$f\ (z,\ \theta)\ =-\rho\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2},$$

则

$$V_o=\left|\int_o^h\int_o^{2\pi}f(z,\ \theta)d\theta dz\right|\leqslant B_a=\int_o^h\left|\int_o^{2\pi}f(z,\ \theta)\,d\theta\right|dz$$

$$\leqslant S=\int_o^h\int_o^{2\pi}|f\ (z,\ \theta)\ |d\theta dz.$$

很不幸，只有在一些非常特殊的情况下，才取等号。这个结果说明了这两个方法中没有一个能给出好的山地区域面积的近似值。但是却指出了求出更为满意的近似值的途径。这个例子清楚地说明了数学理论分析的作用。当然，上面所说的这个

问题，只对很有限的听众感兴趣，也不是我们普及工作的理想项目。这样的材料积累多了，我们的教材，就可以写得更充实，更实际了。

这个例子，说明了数学工作者从其它科学领域寻找数学研究课题的可能性（参看第一章）。

§ 0.3　车间里找

从一个车间，或从个别工人那里得来的问题，也有不少是很有意义的。我在这儿举其中一个作为例子，叫做挂轮问题。

那是 1973 年，我们到了我国中部的洛阳市去推广应用数学方法。洛阳拖拉机厂的一位工人给我们提出一个“挂轮问题”。这个问题，可以用数学语言表达如下：

给定一个实数 ξ，寻求四个介于 20 和 100 之间的整数 a，b，c，d，使

$$\left|\xi-\frac{a\times b}{c\times d}\right|$$

最小。

这位工人给我们指出，从机械手册上所查到的数字，不总是最好的。他以 $\xi=\pi$ 为例，手册上给出的是

$$\frac{377}{120}=\frac{52\times 29}{20\times 24},$$

他自己找到的 $\frac{2108}{671}=\frac{68\times 62}{22\times 61}$

要比手册上的好。他问“还有比这更好的吗？”

这是丢番图逼近问题，粗看起来容易，用连分数有可能

解决这个问题，即从 π 的渐近分数

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \cdots$$

中能找到一个数比这位工人找出的数更好？可是不行！数 $\frac{2108}{671}$ 比 $\frac{3}{1}$，$\frac{22}{7}$，$\frac{333}{106}$ 都要好，π 的其它渐近分数又不能表达为所要求的形式。这样，π 的渐近分数都不行了。显然，直接应用连分数去逼近已解决不了问题。怎么办？

时间只有一天！在我离开洛阳的时候，在火车站给我的助手写了一张小纸条：

$$\frac{377}{120}=\frac{22+355}{7+113}$$

我的助手看了这张小纸条，知道我建议他们用 Farey 中项法来处理这个问题。他们用这个方法，又找到两个比这位工人找到的更好的分数，即

$$\frac{19\times355+3\times333}{19\times113+3\times106}=\frac{7744}{2465}=\frac{88\times88}{85\times27}$$

与

$$\frac{11\times355+22}{11\times113+7}=\frac{3927}{1250}=\frac{51\times77}{50\times25}.$$

后面这个分数是最好的。

当然，这个方法可以用来处理任意的实数 ξ。我的助手和工厂的工人一起，仔细地校正了手册，并用一些更好的（实际上是可能找出的最好的）建议比值，来取代原来的数字。他们还填补了手册中漏列的项。

这个方法对于我们普及工作来说，也还不具有普遍性，在工作中需用“挂轮计算”的只是工人中的极少数。如果用这个方法改进了工程手册，也就起到了同样的作用（参看第二章）。

“选题”问题还需要多方探讨。

§0.4 优选法（O.S.M.）

“来回调试法”是我们经常用的方法。但是怎样的来回调试最有效？1953年，J.Kiefer解决了这一问题。由于和初等几何的黄金数有关，Kiefer法又称为“黄金分割法”。这是一个应用范围很广的方法，我们怎样才能让普通工人掌握这个方法，并用于他们的工作中？

在这方面，我谈一点经验。我经常用一张窄长纸条按下述步骤讲授这个方法。

1）请大家记好一个数字0.618。

2）举例说，进行某工艺时，温度的最佳点可能在1000～2000℃之间。当然，我们可以每隔一度做一个试验，做完一千个试验之后，我们一定可以找到最佳温度。但对一个工厂要做一千次试验，太多了。

3）（取出纸条）。假定这是有刻度的纸条，刻了从1000℃到2000℃。第一个试点在总长度的0.618处做，即1618℃处（见图0.1）。我常用香烟在纸条的这个地方烧一个洞，把这个试点记录下来。

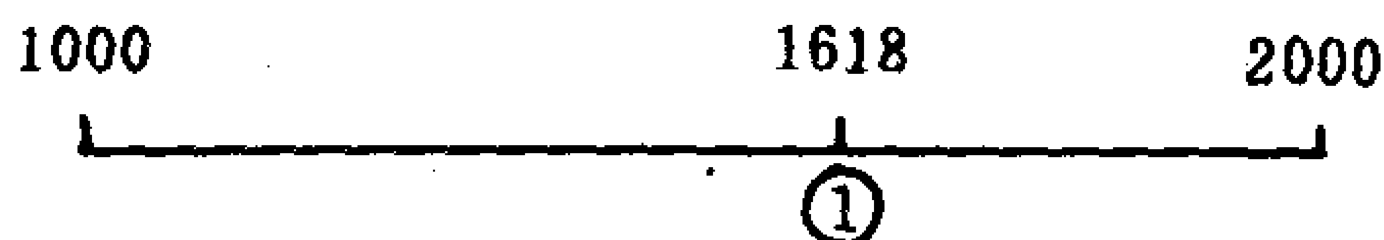


图 0.1

4）把纸条对折，在第一试点的对面，即1382℃的点②处（见图0.2）做第二个试验。比较第一、二试点结果，在较差

点（例如①）处将纸条撕下不要，保留包含较佳点的纸条。

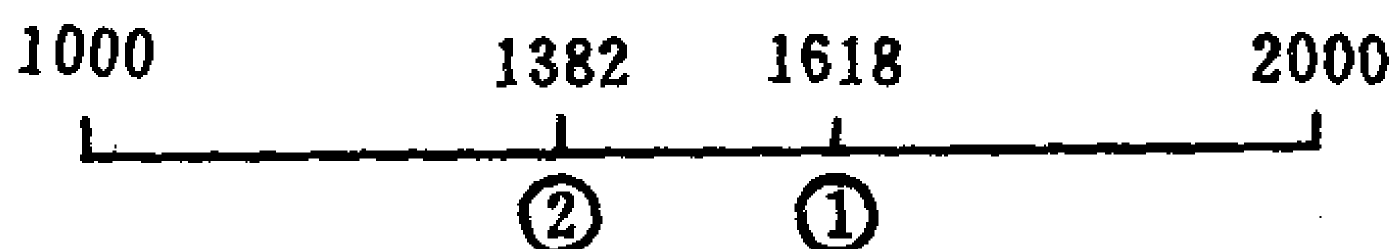


图 0.2

5）对剩下的纸条，重复 4）的处理方法，直到找出最好点为止。

用这样的办法讲，即使还没有受完初等教育的普通工人，一听就能懂，懂了就能用。根据 § 0.1 提出的“选题三原则”，我们选择了若干常用的优选方法，用类似的浅显语言向工人讲授。

对于一些不易普及，但在特殊情况下可能用上的方法，我们也作了深入的研究。例如，1962 年提出的 DFP 法 (Davidon–Fleteher–Powell)，声称收敛速度是

$$\|\vec{x}^{k+1}-\vec{x}^{*}\|=0(\|\vec{x}^{k}-\vec{x}^{*}\|)\ .$$

我们在 60 年代中期就证明了这一方法的收敛速度还应达到

$$\|\vec{x}^{k+1}-\vec{x}^{*}\|=Q\ \ (\|\vec{x}^{k}-\vec{x}^{*}\|^{2})$$

当我 1979 年访问西欧时才得知，W.Burmeister 于 1973 年曾证明了这一结果。但是早在 1968 年，我们就给出了收敛速度达到

$$\|\vec{x}^{k+1}-\vec{x}^{*}\|=Q\ \ (\|\vec{x}^{k}-\vec{x}^{*}\|^{2})$$

的方法。这方法比 DFP 法至少可以少做一半试验（见第三、四章）。

§ 0.5　分数法

有时，工艺过程的参数不是连续变化的。例如一台车床，只有若干档速度。这时候，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 似乎难以用上，但连分数又起了作用。$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数是

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \cdots,\ \frac{F_n}{F_{n+1}},\ \cdots,$$

这儿的诸 F_n 是 Fibonacci 数，由 $F_0=O$，$F_1=1$ 及 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant 0)$ 来定义。这个方法，我是利用“火柴”，在车床旁向工人讲述的。

例如，一台车床有十二档速度

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12]

我们用十二根火柴来表示它们。我们建议在第[8]档做第一个试验，然后用对称法，在[5]做第二个试验。比比看哪个好。如果[8]好，便甩掉[1]～[5]，留下

[6] [7] [8] [9] [10] [11] [12]

不然，则甩掉右面五根，留下

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7]

在任何情况下，都留下七根火柴。

不妨假定[8]的结果好些，再用对称法，在[10]做试验。如果还是[8]好，则甩掉[10] [11] [12]，余下的是

[6] [7] [8] [9].

再用对称法在[7]做试验，如果[7]好，便留下

[6] [7].

最后在[6]做试验，如果[6]较[7]好，则[6]是十二档内最好的一档，我们就用第[6]档的速度进行生产。

这种方法易为机械加工工人所掌握（见第三、四章）。

§0.6 黄金数与数值积分

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金数。它不仅在黄金分割上有用，在丢番图逼近论上也占有独特的地位。因而启发我们想到以下的数值积分公式:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy \approx \frac{1}{F_{n+1}}\sum_{t=1}^{F_{n+1}} f\left(\frac{t}{F_{n+1}},\left\{\frac{F_n t}{F_{n+1}}\right\}\right),$$

这儿 $\{\xi\}$ 表示 ξ 的分数部分。这是一个用单和来逼近重积分的公式。

如何把这个方法推广到多维积分呢？关键在于我们要认识到$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是什么？它是从分单位圆为五份而产生的，也就是从解方程

$$x^5=1$$

或 $$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

而得到的。命 $y=x+x^{-1}$,

则得 $$y^2+y-1=0.$$

解之，得 $$y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

或 $$y = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

这是分圆数。既然分圆为五份的$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$数有用处，那么，分单位圆为 P 等份的

$$2\cos\frac{2\pi l}{p}, \quad 1 \leqslant l \leqslant \frac{p-1}{2} = s$$

是否能用来处理多维的数值积分？此处 P 表示 $\geqslant 5$ 的素数。

Minkowski 定理早已证明存在整数 x_1，x_2，…，x_{s-1} 及 y，使

$$\left|2\cos\frac{2\pi l}{p} - \frac{x_l}{y}\right| \leqslant \frac{S-1}{sy^{s/(s-1)}}, \quad 1 \leqslant l \leqslant s-1.$$

但 Minkowski 的证明是存在性证明。对于分圆域 $Q(\cos\frac{2\pi}{P})$ 而言，因为有一个独立单位系的明确表达式，所以能够有效地找到 x_1，x_2，…，x_{s-1} 及 y。因此可以用

$$\left(\frac{t}{y}, \left\{\frac{x_1 t}{y}\right\}, \cdots, \left\{\frac{X_{s-1} t}{y}\right\}\right), \quad t = 1, 2, \cdots, y$$

来代替 $\left(\frac{t}{F_{n+1}}, \left\{\frac{F_n t}{F_{n+1}}\right\}\right)$，$t = 1, 2, \cdots, F_{n+1}$.

这一点列贯，不但可以用于数值积分，而且凡是用到服从均匀分布的拟随机数时，都可以试用（见第五章）。

§ 0.7　统筹方法（O.P.M.）

教学改革的目的之一是要增长学生的实际知识，使他们往

后在实践中能运用他们学到的知识，去改进生产过程、工程设计或他们能涉及到的其它工作。以上介绍的优选法，既便于普及，又是改进生产工艺的好方法。

质量控制是在出了次品、废品后，不让它们出厂，从而保持本厂产品质量荣誉的方法。但是，与其出了废品后再处理，不如先用优选法找到最好的生产条件而减少废品率。

在生产中，除了生产工艺的问题外，还有生产的组织与管理问题。处理这类问题所用的数学方法，我们称之为统筹方法(O.P.M.) 或统筹学。

统筹方法中也有许多好方法，可以进行普及，仅举几例。

1) 关键路线法 (CPM)。

CPM 是关键路线法的缩写。CPM 是什么？大家都知道了，我只介绍我们是怎样工作的，而不谈方法的细节了。我们开始普及时，为了容易接受起见，而把让工期缩到最短作为目标。但是，一旦大家学会了这个方法，就会懂得去搞投资最少及人力、资源平衡等较为复杂的问题。

我们的第一原则是根据实际工程，使技术人员与工人学会这一方法。步骤是:

a) 调查。调查三件事：i) 组成整个工程的各个工序；ii) 各工序之间的衔接关系；iii) 每道工序所需的时间。要做好这件事，一定要注意依靠生产第一线的工人和技术人员，他们的估计比起其他人员的估计往往更切合实际。

b) 统筹图。依据这些材料，使大家学会画草图，再教会大家找关键路线的方法。然后大家讨论，献计献策，努力缩短工期，定出计划，画出 CP 图 (即统筹图)。

c) CP 图的实施。在 CP 图实施的过程中，经常会有提前或延期完成某些工序的现象，要及时予以了解和调整，随时对

关键路线作出改变。

d) 总结。在工程完成后，依照实际的进度重画 CP 图，这样，可以把这次的经验记录下来，作为下次类似施工的参考。

我们体会到，这一方法宜小更宜大。或者从基层工段做起，逐步汇成整个工程的 CP 图。或者从全局着眼，先拟制一个粗线条的计划，然后由基层单位拟订自己的 CP 图，再综合起来，大家讨论修订，形成总图（见第六章)。

2) 序贯分析。

如果有若干工程（每个工程各有时间估计，或可用 CPM 估出)，可以任意安排先后次序施工。如何安排次序，使总的等待时间最短?

在解决这一问题之前，先讲一个数学问题。

有两组非负数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

与 $$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n.$$

怎样的 (a_{s_i}) 与 (b_{t_i}) 的次序，使

$$\sum_{i=1}^{n} a_{s_i} b_{t_i}$$

最小，或最大? 答案是：(a_{s_i}) 与 (b_{t_i}) 按大小排列同序时最大，逆序时最小。证明是容易的。从下面最简单的情况，不难推出最一般的结果。

若 $a_1 \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant b_2,$

则 $a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1,$

即 $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0.$

一般说来，若(a_i)中有两个与其对应的(b_i)中的两个同序，则改

动其中之一为逆序后，和数将减小。

在阐明上述数学问题后，我常举一个简单的例子来讲序贯分析。有一个水龙头及 n 个容量不等的水桶，依怎样的次序灌水，才能使总的等待时间最短？

设灌满第一桶水需时间 a_1，灌满第二桶需时间 a_2，…，灌满第 n 桶需时间 a_n。那么，注满第一桶水要等的时间是 a_1，注满第二桶要等 a_1+a_2，第三桶要等 $a_1+a_2+a_3$，等等。总的等待时间是

$$T=a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n$$

当序贯 a 按升序排列时最小，即

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n.$$

也就是容量小的先灌。

如果有 S 个水龙头，第一个水龙头处的 m 个水桶容量为 $a_1^{(1)}$，$a_2^{(1)}$，…，$a_m^{(1)}$；第二个水龙头处的 m 个水桶容量为 $a_1^{(2)}$，$a_2^{(2)}$，…，$a_m^{(2)}$；等等。（如果水龙头处的水桶个数不等，则可以引进一些容量为零的水桶，使各水龙头处的水桶个数都相等。）总的等待时间是

$$T=\sum_{j=1}^{s}\left(ma_1^{(j)}+(m-1)a_2^{(j)}+\cdots+a_m^{(j)}\right).$$

命

$$b_1=b_2=\cdots=b_s=m,$$
$$b_{s+1}=b_{s+2}=\cdots=b_{2s}=m-1,$$

等等，立即得出结论：仍然是小桶先灌可得到 T 最小。与序贯分析有关的问题，我们碰到的不算多。一般说来，这些问题用典型的数学方法来处理太复杂。当然，这种情况只有部分能得到满意的答案（见第八章）。

3) 另一个可以普及的方法是运输调度的图上作业法。假定有 m 个小麦产地 A_1，…，A_m，各产小麦 a_1，…，a_m（吨），要运往 n 个消费点 B_1，…，B_n，各需要小麦 b_1，…，b_n（吨）。怎样运输调度，可使运输的吨公里数最小。这问题当然可以用线性规划的方法来处理。但我们往往用较简单和较直观的图上作业法，这个方法的原则是在地图上的货运流向图中没有对流，以及在每一个圈中，沿任一方向的流向总长均不超过整个圈总长之半。可以证明，这样的流向图是运输调度的最优方案（见第九、十、十一章）。

§0.8 统计方法

1) 经验公式及数学见识的重要性。

经验公式往往从许多统计数据归纳而得，具有广博知识和一定数学修养的科学家，很容易看出某个经验公式的意义。举个例子，印度数理统计学家 R.C.Bose 分析了印度稻叶的大量样本，得出一个计算稻叶面积 A 的经验公式

$$A=\frac{\text{长}\times\text{宽}}{1.2}.$$

我不怀疑此公式的可靠性。但是，我国的一些农学家应用这个公式去估计他们的稻子试验田的产量，我看了他们稻田里叶子的形状后，便立刻指出这公式不适合他们的稻叶。他们采集了一些稻叶样本来测量，果然发现这公式估计的面积比实际稻叶面积大。他们很奇怪，我画了下面这个图向他们解释，其中阴影部分表示叶片（见图 0.3）。在这种情形，长方形面积与 A

的比近似为$\frac{6}{5}$，即 1.2。但在他们的试验田里，叶片的形状较窄长。我又画了另一个图（见图 0.4），这时，长方形面积与 A 的比近似为$\frac{4}{3}$，当然大于 1.2 了。这就说明了为什么用 Bose 公式会高估了他们稻叶的面积。

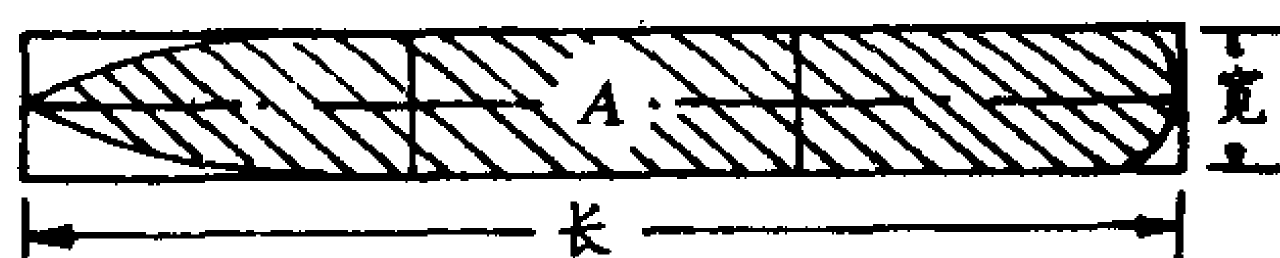


图 0.3



图 0.4

由此，我们得到了很好的教训：一个经验公式的数学背景是非常重要的。

2）简单统计方法。

在实验科学中，我们常常应用统计方法。当然不能否认，这些方法是重要的。然而，我个人认为某些方法太复杂繁琐，而且很容易被滥用、误用。先举一些例子。

例 1 以 x_1，…，x_{20} 表示某一试验独立地重复 20 次所得的观察值。命

$$\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_{20}}{20} \quad (均值)$$

与

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}{19}}\qquad(标准离差).$$

这时，做实验的人可以声称，区间

$$\left(\bar{x}-\frac{1.96s}{\sqrt{20}},\ \bar{x}+\frac{1.96s}{\sqrt{20}}\right)$$

是某种“均值”的“置信”估计。这样复杂的方法似乎不易为我国的普通工人所理解。此外，基本的 Gauss 假设在这里很可能不成立!

实际上，我倾向于用如下的简便方法。

将观察值排好次序，记为

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(20)}.$$

我们可以如实地说，观察值落在区间

$$\left(\frac{x_{(1)}+x_{(2)}}{2},\ \frac{x_{(19)}+x_{(20)}}{2}\right)$$

中的可能性大于$\frac{18}{20}=0.9$。这个方法可以很快地被我们的工人和农民所接受。

例 2 假如有两种生产方法，每种方法有五个观察值，要求检验哪种方法较好。以 $(a_1,\ \cdots,\ a_5)$ 与 $(b_1,\ \cdots,\ b_5)$ 分别表示第一法与第二法的观察值。我们可以借助于通常的 Student t 分布，试一试比较两者的均值。但要知道，用这样一个复杂的办法，要基于一系列的假设，诸如正态性、同离差、独立性等。对于这些东西，我国的普通工人是不容易理解的。

有一个更为可靠的简便方法，它只基于有序样本 $a_{(1)}>$

$a_{(2)} > \cdots > a_{(5)}$ 和 $b_{(1)} > b_{(2)} > \cdots > b_{(5)}$ 的比较，可能更适于在我国推广。举例说，如果将两组样本混合起来比较次序，有

$$a_{(1)} > a_{(2)} > a_{(3)} > a_{(4)} > b_{(1)} > a_{(5)} > b_{(2)} > b_{(3)} > b_{(4)} > b_{(5)}$$

或 $a_{(1)} > a_{(2)} > a_{(3)} > a_{(4)} > a_{(5)} > b_{(1)} > b_{(2)} > b_{(3)} > b_{(4)} > b_{(5)}$

即使普通工人也很容易明白：不能说两种生产方法一样好，而会赞同第一种生产方法好。我通常伸出两只手，两只大拇指互相交叉（见图 0.5），用以说明前者。实际上，上述说法不成立的可能性少于 0.04。



图 0.5

3）PERT.

考虑“计划检查评审技术”，简称 PERT。假如在表示某工程的网络中共有 n 个活动，描述第 i 个活动的持续时间有三个基本参数。以 a_i，c_i 和 b_i 分别表示“乐观时间”，“最可能时间”和“悲观时间”。第 i 个活动的持续时间，通常假定服从（a_i，b_i）上的一个 Beta 分布，具有平均时间 m_i，

$$m_i = \frac{a_i + 4c_i + b_i}{6}$$

与方差

$$\frac{(b_i - a_i)^2}{36}.$$

整个工程所需总时间的概率分布，是否可用 Gauss 公布来近似？对这个问题仍然有争议。Gauss 分布的前提是中心极限定理（CLT）。"服从 Beta 分布"这个假设本身已有争论，即使不计这点，能否草率地应用 CLT，还很有疑问。显然，假若 n 个活动的适当比例是有序的，那么，就有必要去仔细分析，检查 Gauss 结论是不是可靠的（见第七章）。

4）试验设计。

我认为，迄今为止还没有给予非线性设计足够的重视。过去偏重于线性模型的研究，却掩盖了一个重要的事实：这些模型往往不符合现实。在此我不准备进一步阐述这一观点（见第四章）。

5）分布的类型。

有人一直主张用 PearsonⅢ型分布去模拟"特大"洪水间隔时间的分布。在这个问题中，数据本来就少得可怜，而用 PearsonⅢ型分布是否符合事实？是否明智？都值得怀疑。更不用说从这模型去预测下一次大洪水到来的时间了。也许用"点过程"方法来模拟与预测这一现象更为适宜，在这里点事件表示洪水的周期。我知道，这个问题是这一领域中最富有挑战性的问题之一。

§0.9 结　语

如果要我用几句话说明我在最近十五年来普及数学方法中

学到了什么？我会毫不犹豫地回答，从中我学会了

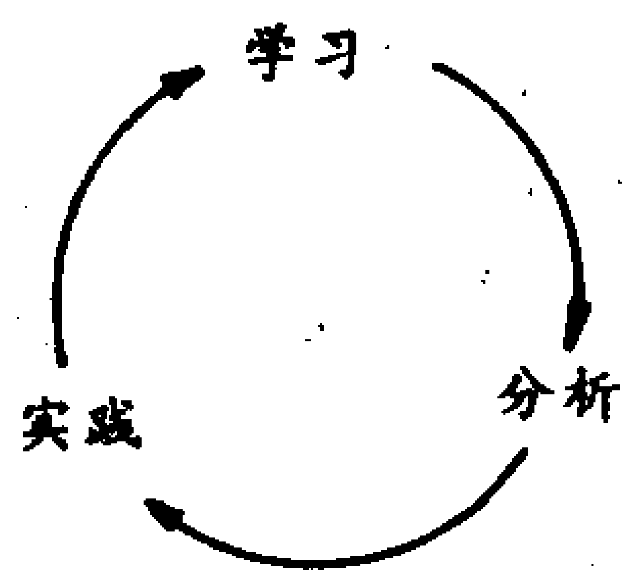


图 0.6

第一章　关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题[①]

§1.1　引言

感谢我国的地理、矿冶与地质工作者们，他们向我们介绍了不少计算矿藏储量与计算坡地面积的实用方法，使我们能学习到这些方法，从而进行了一些研究。作者试图在本文中对这些方法进行比较，阐明它们相互之间的关系，与这些方法的偏差情况，并提出若干建议。

关于分层计算矿藏储量方面，在矿体几何学上（见[2]~[4]）有 Бауман 公式，截锥公式与梯形公式。设用它们算出来的矿藏体积分别为 v，v_1 与 v_2。本文证明了它们满足不等式：

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2$$

并且完全确定了取等号的情况。关于这三个公式的比较问题，

① 与王元同志合作。

作者认为主要应从量纲来看，因此我们认为 Бауман 公式的局限性较少。

本文提供了一个双层合算矿藏储量的公式，这个公式的获得首先在于我们找到了 Бауман 公式的一个新证明。这个证明既简单，而又易于进一步改进。它的优点在于比 Бауман 公式麻烦得并不很多，但比 Бауман 公式多考虑了一些因素，同时也比 Соболевский 公式（即通常的双层合算矿藏储量的公式，见[2]~[4]）多考虑了一些因素。我们推荐它供我国矿藏储量计算工作者参考或试用。

关于坡地面积的计算方面，在地理学上常用 Волков 方法（见[5]~[6]）；在矿体几何学上，则常用 Бауман 方法（见[1]~[2]）。本文指出，Бауман 方法比 Волков 方法精密，但用这两个方法算出的结果常比真正的结果偏低。本文完全定出了能够用这两个方法来无限精密地计算其面积的曲面及指出这两个方法的偏差情况。详言之，偏差依赖于曲面上点的倾角的变化。只有当整个曲面上各点的倾角都相差不大时，Волков 方法才能得到精确结果，而只有当曲面在相邻两等高线间的点的倾角的变化不大时，Бауман 方法才能给出精密的结果，然而在其他情况下，用这两个方法的误差就可能比较大了，因此我们建议在等高线图上通过制高点引进若干条放射线，当曲面与直纹面相近时，可以分别求出相邻两条放射线间的表面积，然后总加起来。如果相邻两条等高线间与相邻两条放射线间，曲面的倾角的变化都比较大时，可以分别算出由放射线及等高线所织成的每一小块的表面积，然后总加起来。这样算出的结果，偏差就比较小了。

§ 1.2　矿藏储量计算

1. Бауман 方法

假定有一张矿藏的等高线图，高程差是 h，地图上所表示的一圈，实际上便是一定高程的矿体的截面积。我们来估计两张这样的平面之间的矿藏的体积。这两张平面之间的距离便是高程差 h。我们以 A，B 各表示下、上两个等高线圈所包围的截面（见图 1.1，它们的面积亦记为 A，B）。Бауман 建议用

$$v=\left[\frac{1}{2}\ (A+B)\ -\frac{T\ (A,\ B)}{6}\right]h \qquad (1)$$

来估算这两个高程间的一片的体积 v，此处 $T(A,B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积，称它为 Бауман 改正数。

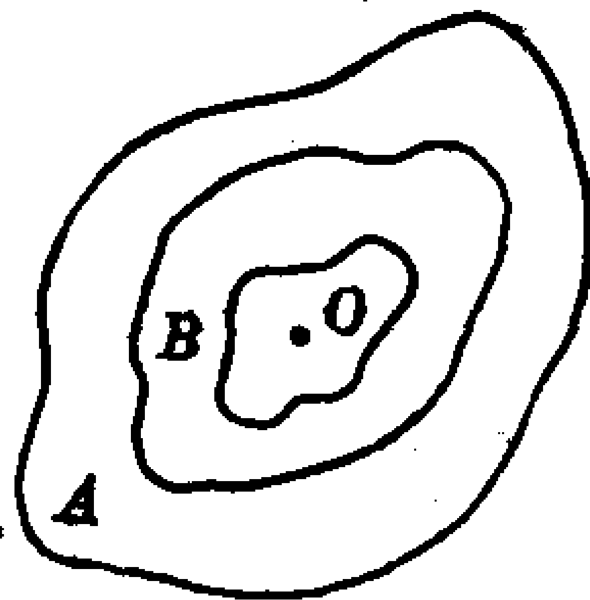


图 1.1

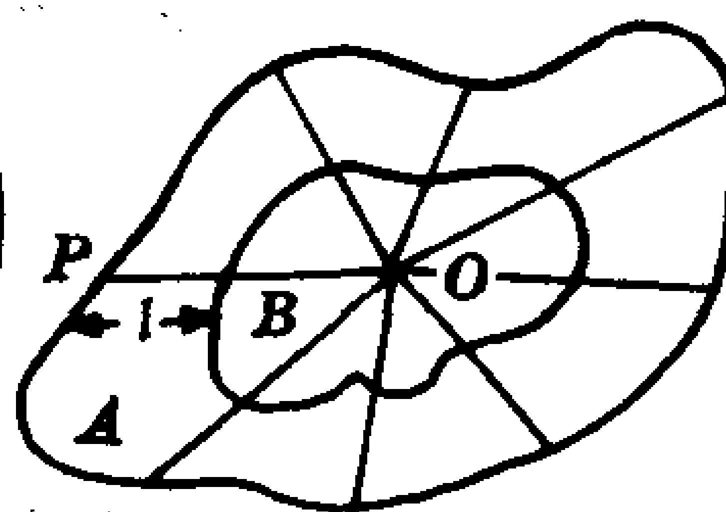


图 1.2

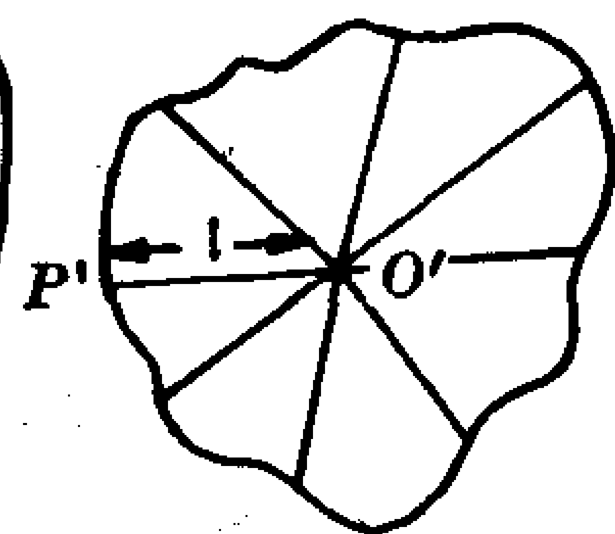


图 1.3

如图 1.2 中，从制高点 O 出发，作放射线 OP，这放射线在地图上 A，B 之间的长度是 l。另作图 1.3，取一点 O'，与 OP 同方向取 $O'P'=l$。当 P 延着 A 的周界走一圈时，P' 也得一图形，这图形的面积就称为 Бауман 改正数。因为它依赖于两截面 A 与 B，所以我们用 $T(A,B)$ 来表示它。

把算出来的矿体体积一片一片地加起来，就得到矿藏的体积 V. 换言之，设矿体的等高线图的 $n+1$ 条等高线所围成的

面积依次为 S_0，S_1，…，S_n，则矿体的体积 V 由下式来近似计算：

$$V=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{m=1}^{n-1}S_m\right)h-\frac{h}{6}\sum_{m=0}^{n-1}T(S_m,S_{m+1}), \qquad (2)$$

此处 h 为高程差（图 1.4）。

定理 （Бауман）已知物体的下底 A 与上底 B（其面积亦记为 A，B）均为平面，且 A 平行于 B，h 为它们之间的高，O 为 B 上一点，若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体，所得的截面都是四边形，则物体的体积 v 恰如 (1) 式所示。

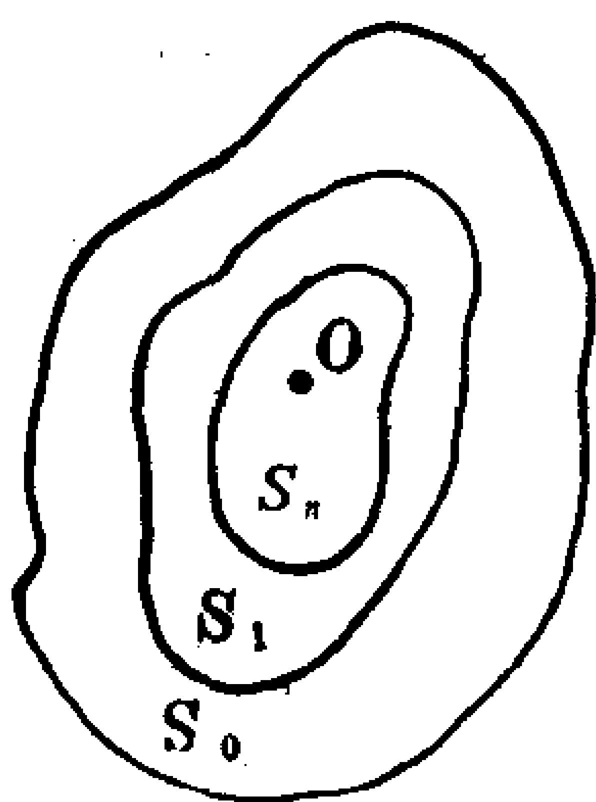


图 1.4

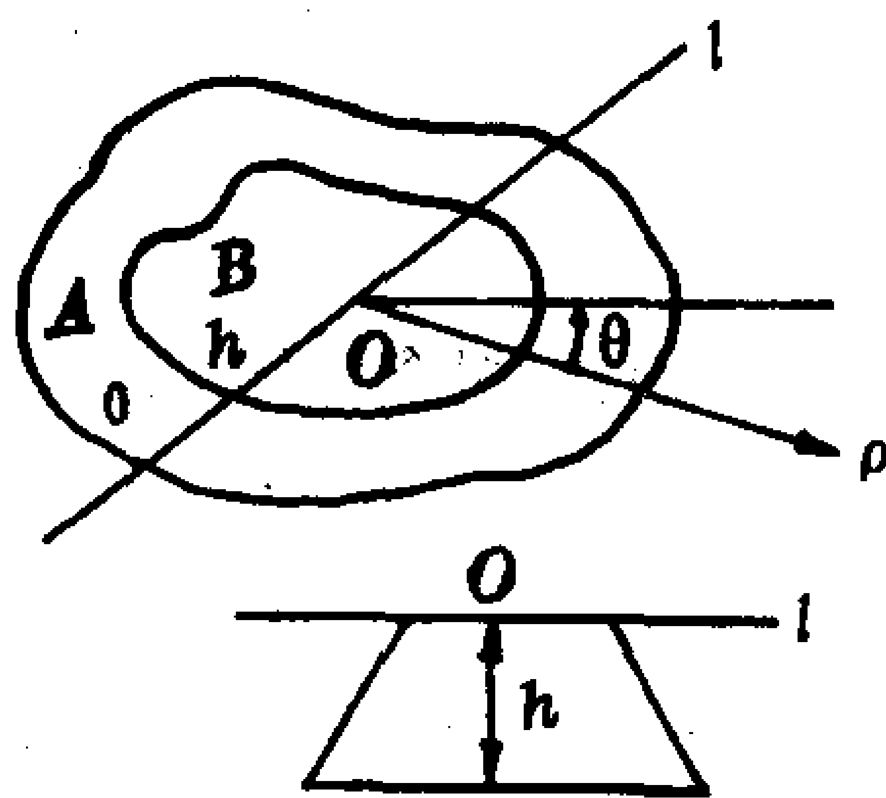


图 1.5

证 以 O 为中心，引进极坐标（见图 1.5）。命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\ \theta) \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

其中，$\rho(z,\ 0)=\rho(z,\ 2\pi)$。今后我们常假定 $\rho(z,\ \theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h)$ 是连续的，我们不妨假定 A、B 的高程各为 0 及 h。并且记

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\ \theta),\ \rho_2(\theta)=\rho(h,\ \theta)$$

由假定可知

$$\rho(z,\ \theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\quad (0\leqslant z\leqslant h)$$

因此物体的体积为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\ \theta)d\theta dz\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2 dzd\theta\\
&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta\\
&=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right]\\
&\quad-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2 d\theta\right]\\
&=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,\ B).
\end{aligned}$$

定理证完。

2. **Бауман 公式，截锥公式与梯形公式的关系**

假定物体的下底 A 与上底 B 均为平面，且 A 平行于 B，h 为它们之间的高，O 为 B 上一点，除 Бауман 公式外，常用下面两公式来近似计算物体的体积:

$$\text{截锥公式: } v_1=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}), \tag{3}$$

$$\text{梯形公式: } v_2=\frac{h}{2}(A+B), \tag{4}$$

通常当 $\frac{A-B}{A}>40\%$ 时，用公式 (3)，而当 $\frac{A-B}{A}<40\%$ 时，用公式 (4) .

定理 1 不等式

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2 \tag{5}$$

恒成立，当且仅当物体为截锥，且此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时，$v = v_1$，当且仅当 $A = B$ 时，$v_1 = v_2$.

证 如 Bayман 定理中的假定，由 Bayман 公式及 Буняковский－Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned} v &= \frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta)+\rho_2^2(\theta)+\rho_1(\theta)\rho_2(\theta))d\theta \\ &\leqslant \frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta}\right] \\ &= \frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}) = v_1, \end{aligned}$$

当且仅当 $\rho_1(\theta) = c\rho_2(\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$c$ 为常数）时，即当这物体为一截头锥体，而此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时，才会取等号（图 1.6).

又由于

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= \frac{h}{2}(A+B) - \frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}) \\ &= \frac{h}{6}(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

所以 $$v_1 \leqslant v_2.$$

当且仅当 $A = B$ 时取等值，定理证完.

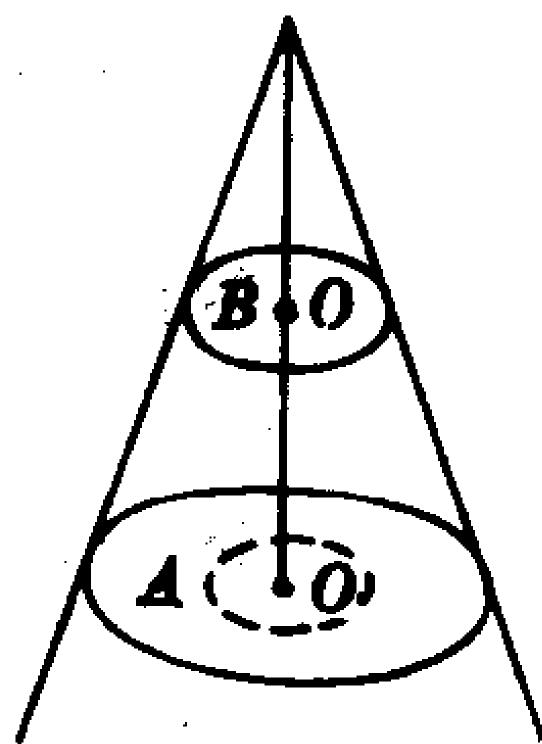


图 1.6

关于这三个公式的比较问题，我们认为主要应该从量纲来看，面的量纲为 2。所以把面的量纲考虑为 1 所得出的公式，局限性往往是比较大

的。

梯形公式是把中间截面看成上底与下底的算术平均而得到的，所以把面的量纲当作 1。

Бауман 公式则是将中间截面作为量纲 2 来考虑的。详言之，它假定了 $\rho(z,\ \theta)$为 $\rho(0,\ \theta)$与 $\rho(h,\ \theta)$关于 z 的线性关系而得到的(见 1)。

截锥公式亦是将中间截面的量纲考虑为 2。但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0,\ \theta)=c\rho(h,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，此处 c 为一常数。

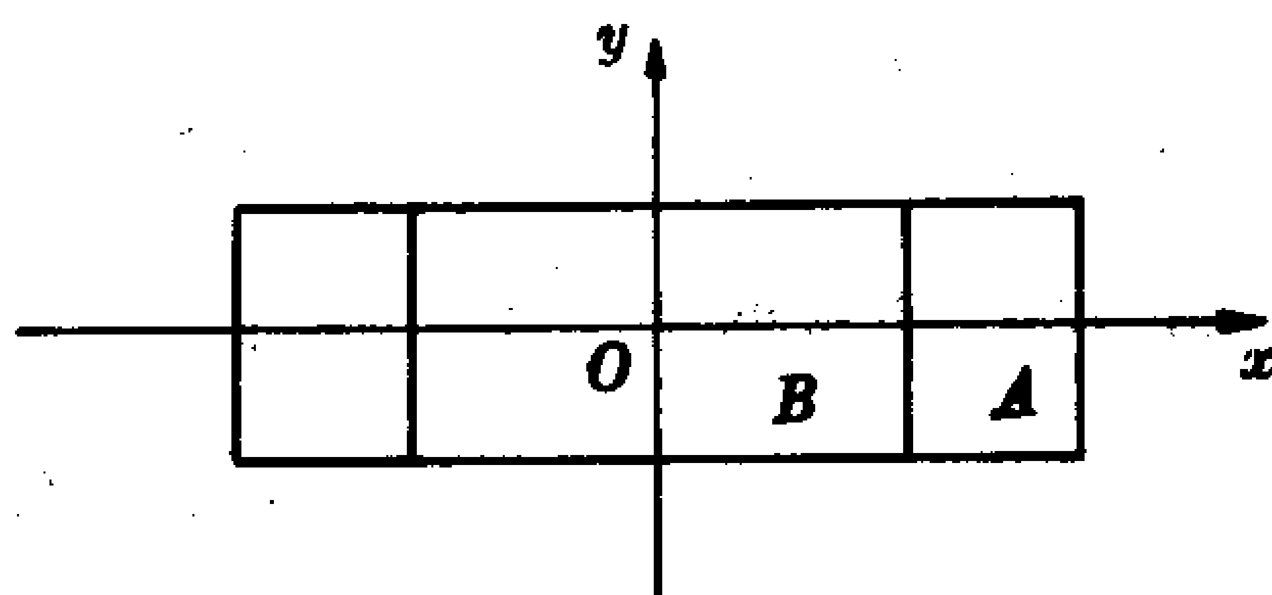


图 1.7

因此我们认为 Бауман 公式更具有普遍性，所以用它来近似计算物体的体积，一般说来，应该比较精确，但这并不排斥对于某些个别物体，用其他两个公式更恰当些的可能性。例如有一梯形，其上底与下底的宽度相等（如图 1.7 所示）。用梯形公式反而能获得它的真正体积，而用 Бауман 公式与截锥公式来计算，结果就偏低了。不过，我们注意此时这梯形的截面的量纲为 1（由于沿 y 轴未变）。

相对于 Бауман 公式，我们还可以估计用梯形公式与截锥公式的相对偏差。

例如当$\dfrac{A-B}{A}<40\%$（即 $B>\dfrac{3}{5}A$）时，用梯形公式算出的结果相对于 Бауман 公式算出的结果的相对偏差为

$$\Delta=\frac{v_2-v}{v}=\frac{\frac{1}{2}(A+B)h-\frac{1}{2}(A+B)h+\frac{h}{6}T(A,\ B)}{\frac{1}{2}(A+B)h-\frac{h}{6}T(A,\ B)}$$

$$=\frac{T(A,\ B)}{3(A+B)-T(A,B)}.$$

因为 $T(A,\ B)\leqslant A-B$

(即$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2d\theta\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta$,此不等式显然成立），所以

$$\Delta\leqslant\frac{A-B}{2A+4B}$$

再以条件 $B>\frac{3}{5}A$ 代入，得

$$\Delta\leqslant\frac{A-\frac{3}{5}A}{2A+\frac{12}{5}A}=\frac{1}{11}<10\%.$$

3. 建议一个计算矿藏储量的公式

Бауман 公式是假定 $\rho(z,\ \theta)$ 为 $\rho(0,\ \theta)$ 与 $\rho(h,\ \theta)$ 关于 z 的线性关系而得到的。如果我们将两相邻分层放在一起估计，即已知相邻三等高线 $\rho(0,\ \theta)$，$\rho(h,\ \theta)$ 与 $\rho(2h,\ \theta)$。我们用通过 $\rho(0,\ \theta)$，$\rho(h,\ \theta)$ 与 $\rho(2h,\ \theta)$ 的抛物线所形成的曲面 $\rho=\rho(z,\ \theta)$ 来逼近矿体这两分层的表面，因此我们建议用如下的计算方法。

命 A，B，C 分别表示连续三等高线所围成的截面（面积亦记为 A，B，C），A 与 B 及 B 与 C 之间的距离都是 h，则这两片在一起的体积可用以下公式来近似计算

$$v_3 = \frac{h}{3}(A + 4B + C) - \frac{h}{15}(2T(A, B) + 2T(B, C) - T(A, C)). \tag{6}$$

如果不计（6）式中的第二项，就是熟知的 Соболевский 公式。把二片二片的体积总加起来，就得到矿藏的总体积 V 的近似公式。换言之，设矿藏的等高线图的 $2n+1$ 条等高线所围成的面积依次为 S_0，S_1，…，S_{2n}，而高程差为 h，则矿藏的体积 V 由下式来近似计算

$$\begin{aligned} V = &\frac{h}{3}\left[S_0 + S_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} S_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} S_{2i}\right] \\ &- \frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i+1}, S_{2i+2}) \right. \\ &\left. - \sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+2})\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

注意：如果等高线图含有偶数条等高线，则最上面一片可以单独估计，其余的用公式(7)。

定理 2 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面，B 为中间截面（面积亦分别记为 C，A，B），且 A，C 都与 B 平行，A 与 B 之间及 B 与 C 之间的距离都是 h，O 为 C 上一点（图 1.8）。若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体，所得的截面的周界均由两条直线及两条抛物线所构成，则物体的体积 v_3 恰如(6)式所示。

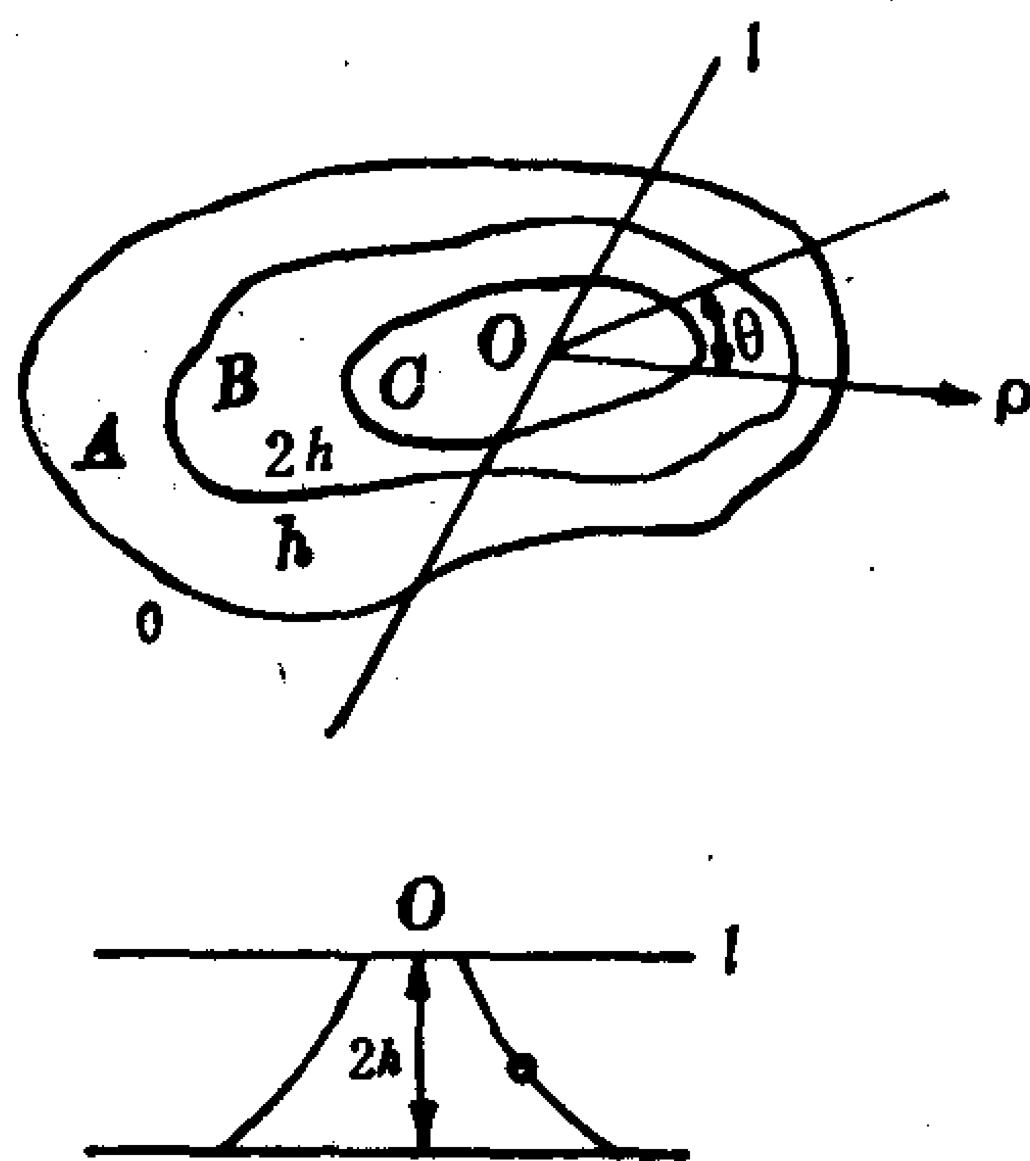


图 1.8

证 以 O 为中心，引进极坐标，命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\ \theta)\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \rho(z,\ 0)=\rho(z,\ 2\pi)).$$

不妨假定 A，B，C 的高程分别为 0，h，$2h$ 并且记

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\ \theta),\ \rho_2(\theta)=\rho(h,\ \theta),\ \rho_3(\theta)=\rho(2h,\ \theta)$$

由假定可知

$$\rho(z,\ \theta)=\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\qquad(8)$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\ \theta)d\theta dz\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2dz\\
&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta)+\frac{16}{15}\rho_2^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_3^2(\theta)\right.\\
&+\frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)\\
&\qquad\left.+\frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta)-\frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)\right]d\theta\\
&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{4\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_3^2(\theta)}{3}\right.\\
&\qquad-\frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2-\frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2\Big]d\theta$$

$$=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,\ B)$$

$$+2T(B,\ C)-T(A,\ C)).$$

定理证完。

§ 1.3 坡地面积计算

4.Вауман 方法及 Волков 方法

现在先介绍矿学家及地理学家所常用的方法，假定地图上以 Δh 为高程差画出等高线，今后我们常假定有一制高点，及等高线成圈的情况来讨论（其他情况也可以十分容易地被推出来）。我们假定由制高点出发，向外一圈一圈地画出等高线 (l_{n-1})，(l_{n-2})，…，(l_0)（图 1.9）。记(l_0)的高度为 0，而制高点用(l_n)表之，它的高度是 h，(l_i)与(l_{i+1})之间的面积用 B_i 表示（即投影的面积）。

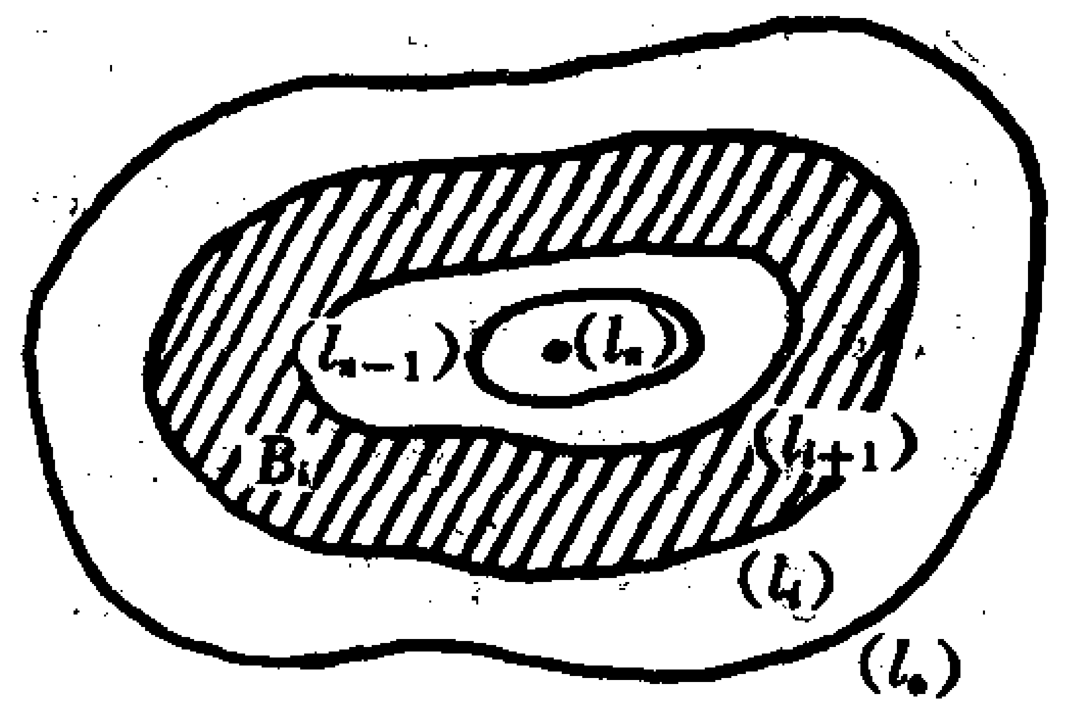


图 1.9

Ⅰ. 矿体几何学上常用的方法的步骤如下：

a. $C_i=\frac{1}{2}\ (l_i+l_{i+1})\Delta h$（中间直立隔板的面积）；

b. $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 就是所求的斜面积的渐近值（Бауман 方法）。

Ⅱ．地理学上常用的方法的步骤如下：

a. $l=\sum_{i=0}^{n-1} l_i$（等高线的总长度），$B=\sum_{j=0}^{n-1} B_j$（总投影面积），$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\Delta h\cdot l}{B}$（平均倾角）；

b. $B\sec\alpha=\sqrt{B^2+(\Delta h\cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的渐近式（Волков 方法）。

附记 $\sqrt{a^2+b^2}$ 可以借商高定理，用图解法很快求出。

这两个方法哪一个更好一些？这些方法给出的结果在怎样的程度上迫近斜面积？换句话说，当等高线的分布趋向无限精密时（也就是 $\Delta h\to 0$ 时），这些方法所给出的结果是什么？是否就是真正的斜面积呢？一般说来，答案是否定的，仅仅是一些十分特殊的曲面，答案才是肯定的。我们将在下面定出这些曲面，并将给出这些方法和实际结果的相差比例，同时指出避免较大偏差的计算步骤。

5. Ба，Во 与 S 的关系

以制高点 (l_n) 为中心 O，引进极坐标。命高度为 z 的等高线方程为

$$\rho=\rho(z,\ \theta)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,\ \theta)=\rho(z,\ 2\pi)$。我们在今后常假定

$\dfrac{\partial\rho(z,\ \theta)}{\partial\theta}$ 与 $\dfrac{\partial\rho(z,\ \theta)}{\partial z}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h)$ 都是连续的。

命 $z_i=\dfrac{h_i}{n}$，则 l_i 所包围的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\ \theta)d\theta,$$

所以由中值公式可知

$$B_i=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\rho^2(z_i,\ \theta)-\rho^2\ (z_{i+1},\ \theta)\right]d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\rho(z_i',\ \theta)\ \frac{\partial\rho(z_i',\ \theta)}{\partial z_i'}d\theta\Delta h,$$

此外 $z_i'\in[z_i,\ z_{i+1}]$，而 $\Delta h=\dfrac{h}{n}$。另一方面，(l_i) 的长度等于

$$l_i=\int_{(l_i)}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho\ (z_i,\ \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\ d\theta\ .$$

由 Бауман 方法所得出的结果是

$$C_i=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i'',\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i'',\ \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\ d\theta\Delta h,$$

这里用了中值公式，$z_i''\in[z_i,\ z_{i+1}]$，因此当 $\Delta h\to 0$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$$

趋近于

$$Бa=\int_0^h\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}d\theta\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\ d\theta\right)^2}\ dz.\qquad(9)$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\Delta h\to 0$ 时所趋向的数值。

又易见 $B=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho^2(0,\ \theta)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz$

（注意：$\rho(h,\ \theta)=0$）及 Δhl 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{n}\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\ \theta)\ +\left(\frac{\partial\rho\ \ (z_i,\ \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\ d\theta$$

$$=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\ d\theta,$$

因此用 Болков 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时，所趋向的数值为

$$\text{Bo}=\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}dz\right)^2}. \quad (10)$$

由于

$$ds^2=\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2\right]d\theta^2+2\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\ \frac{\partial\rho}{\partial z}d\theta dz+\left(1+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2\right)dz^2,$$

所以斜面的面积 S 为

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,d\theta \quad (11)$$

为了比较 Ба，Bo 与 S，我们引进一个复值函数

$$f(z,\ \theta)=\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}, \quad (12)$$

则得

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f\ (z,\ \theta)\ d\theta\right|dz, \quad (13)$$

$$\text{Bo}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f\ (z,\ \theta)\ d\theta dz\right|, \quad (14)$$

及

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f\ (z,\ \theta)\ |d\theta dz. \quad (15)$$

因此显然有不等式

$$\text{Bo}\leqslant\text{Ба}\leqslant S \quad (16)$$

由此可见：(i) Bayман 方法比 Болков 方法精密；(ii) 所求出的结果比真正的结果偏低一些；(iii) Bayман 方法既然偏低，因此可以作如下的修改，即取 $C_i=l_i\Delta h$。这样既

简化了算法而又增大了数值。

现在来考虑 Bo $= S$ 及 Ба $= S$ 的曲面，先讲下面的引理:

引理 若$f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 中的复值函数，此处 a，b 均为实数，则等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \tag{17}$$

成立的必要且充分的条件是$f(x)$ 的虚实部分之比为常数。

证 命$f(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$，$\rho(x) \geqslant 0$，而 $\theta(x)$ 是实函数，显然如果 $\theta(x)$ 为与 x 无关的常数，则 (17) 成立。反之，由于

$$\left(\left|\int_a^b f(x)dx\right|\right)^2 = \int_a^b\int_a^b f(x)\overline{f(y)}dxdy$$

$$= \int_a^b\int_a^b \rho(x)\rho(y)e^{(\theta(x)-\theta(y))}dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y)\cos[\theta(x) - \theta(y)]dxdy,$$

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^2 = 2\iint\limits_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y)dxdy$$

因而若 (17) 成立，则必

$$\cos(\theta(x)) - \theta(y)) \equiv 1,$$

即 $\theta(x) \equiv \theta(y)$。此即引理所需。

易知对于多重积分，引理依然成立。

由引理可知

$$\text{Bo} = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^h f(z, \theta)dzd\theta\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z, \theta)|dzd\theta = S$$

成立的必要且充分的条件为 $f(z, \theta)$ 的虚实部分之比是常数 c，则得偏微分方程

$$\rho^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2=c^2\left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2。 \tag{18}$$

换言之，仅有适合这偏微分方程的函数 $\rho=\rho(z, \theta)$，Болков 方法才能给出正确答案。这当然要适合以下的条件：$\rho(h, \theta)=0$（这是制高点）及 $\rho(0, \theta)=\rho_0(\theta)$（这是曲面的底盘方程）。

我们并不解这偏微分方程，而从它的几何意义入手，把 θ 与 z 看成参变数，即

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数，由

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial \theta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial z}\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial z}\sin\theta,\ \frac{\partial z}{\partial z}=1$$

得知在曲面上的点 (θ, z) 的法线方向是

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\quad -\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,\quad -\rho\frac{\partial \rho}{\partial z}\right).$$

由 (18) 可知它与 z 轴的交角 α(即点 (θ, z) 的倾角）的余弦等于

$$\cos\alpha=\frac{-\rho\dfrac{\partial \rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2+\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

是一常数。也就是说，这曲面的切平面与地平面（即 xy 平面）成一固定角度 α。我们来说明这样的曲面的几何性质。

从制高点向 xy 平面作任一垂直平面，这平面与该曲面的交线有次之性质。这曲线上每一点的切线与 xy 平面的交角为 α。因此，它是一条直线。

从任一平面封闭曲线 (l_0) 作底盘，以任一投影在盘内的点 (l_n) 作制高点。通过制高点与底盘垂直的直线称为轴。通过 (l_0) 上任一点 A 作一直线，它在 A 与轴所成的平面上，与底盘的交角是 α。这样直线所成的图形便是适合 Bo $= S$ 的图形。

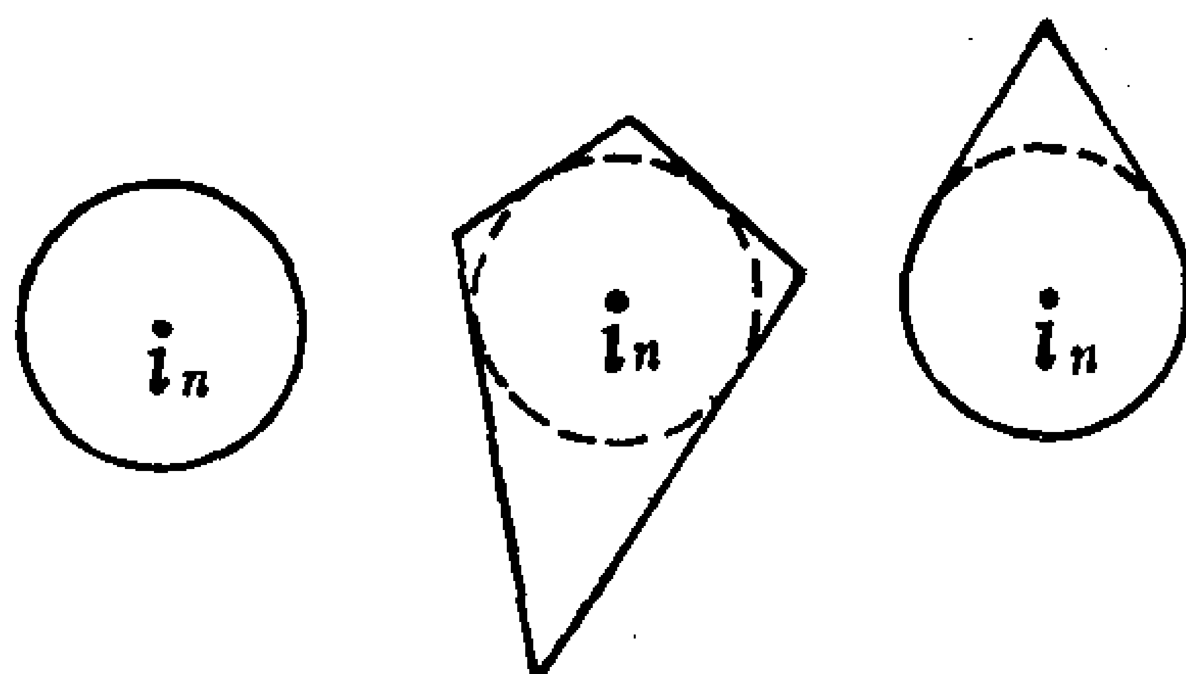


图 1.10

所以，如果有最高峰，而且向下看没有陡峭的角度，则仅有以下的曲面才能 Bo $= S$。底盘是圆或圆的若干切线形成的多角形或一些圆弧及一些切线所形成的图形，轴的尖端在通过圆心而垂直于底盘的直线上（见图 1.10）。

通俗些说，只有蒙古包，金字塔和一些由此复合出来的图形，才能由 Волков 方法来无限逼近。

但什么时候 Ба $= S$ 呢？当然 Bo $= S$ 的时候 Ба $= S$ 除掉上面所求的曲面，还有其他曲面否？等等。有！证明如下，从

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta)\, d\theta \right| dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)|\, d\theta dz = S$$

由 $$\int_0^h \left(\int_0^{2\pi} |f(z, \theta)|\, d\theta - \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta)\, d\theta \right| \right) dz = 0.$$

因为积分号下的函数是非负的。因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|d\theta=\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|$$

因此当固定 z 时，$f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数，即方程（18）中的 c 是仅为 z 的函数。所以仅有下面的曲面才能 Ба $=S$。高程相同之处，曲面有相同的倾角。用通俗的话说，只有葫芦，白塔（北海），才能由 Бауман 方法来无限逼近。

现在我们来估计一下这两个方法给出的结果的偏差情况。假定曲面上点的倾角的余弦介于两正常数 ξ 与 η 之间，即

$$\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta,$$

即
$$\xi\leqslant\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}\leqslant\eta,$$

由此可得
$$\frac{\rho^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\geqslant 1-\eta^2,$$

因而

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}dzd\theta\\&\geqslant\sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\,dz\\&=\sqrt{1-\eta^2}\,S.\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dzd\theta\geqslant\xi S$$

因此　　$\text{Bo} \geqslant \sqrt{\xi^2 S^2 + (1-\eta^2)} S = \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}\, S.$

又因为 $1 > \eta \geqslant \xi > 0$，所以

$$\frac{\xi}{\eta} \leqslant \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}$$

(将两端平方，此式即 $(\eta^2-\xi^2)(1-\eta^2) \geqslant 0$) 即得

$$\text{Bo} \geqslant \frac{\xi}{\eta} S.$$

总而言之，我们证明了下面的定理。

定理 3　若曲面 $\rho = \rho(z, \theta)$ $(0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 上任一点的倾角 α 的余弦都满足 $0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta$，则不等式

$$\frac{\xi}{\eta} S \leqslant \text{Bo} \leqslant \text{Ба} \leqslant S \tag{19}$$

成立。$\text{Bo} = S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的倾角，$\text{Ба} = S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的倾角。

6. 算法建议

由定理 3 可以看出只有当曲面上的点的倾角变化不大时，Волков 方法才能得到精确结果，而只有当曲面在相邻两高程间的点的倾角相差不大时，Бауман 方法才能给出精密的结果，然而在其他情况下，用这种方法的误差就可能比较大了。

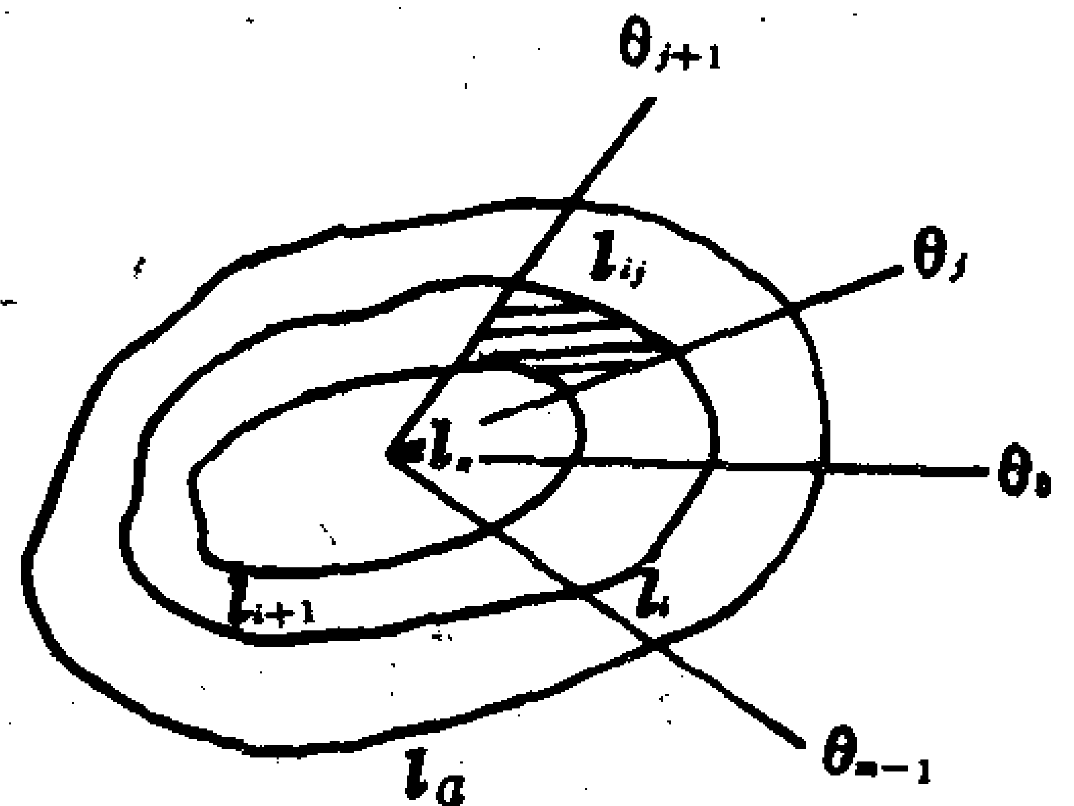


图 1.11

因此我们建议如下的算法：在等高线图上（图 11），通过制高点 l_n 引进若干条放射线 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{m-1}$，其中 θ_j 的幅角

等于$\frac{2\pi j}{m}$。放射线 θ_j,θ_{j+1} 与等高线 l_i，l_{i+1} 所围成的面积记为 d_{ij};l_i 被 θ_j、θ_{j+1} 所截取的一段的长度记之为 l_{ij}。

方法 I. a. $D_j=\sum_{i=0}^{n-1}d_{ij}$（等高线图在放射线 θ_j 与 θ_{j+1} 之间的面积）；

b. $E_j=\left(\sum_{i=0}^{n-1}l_{ij}\right)\Delta h$（中间隔板在两直立墙壁之间的面积之和）；

c. $\sigma_1=\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{D_j^2+E_j^2}$ 就是所求曲面面积的渐近值。

方法 Ⅱ. a. $e_{ij}=l_{ij}\Delta h$（中间隔板在两直立墙壁之间的面积）；

b. $\sigma_2=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{d_{ij}^2+e_{ij}^2}$ 就是所求曲面面积的渐近值。

与上段相同的方法可知

$$K=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right)^2+\left(\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}dz\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\int_0^h f(z,\theta)\,dz\right|d\theta \tag{20}$$

及

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,dz\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^h|f(z,\theta)|\,dz\,d\theta \tag{21}$$

分别为当 $n\to\infty$，$m\to\infty$ 时，σ_1 与 σ_2 所趋近的数（关

于 $f(z, \theta)$ 的定义请参看(12) 式）。

显然 $Bo \leqslant K \leqslant S$ （见(10)），同上段的方法可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直纹面。由于 σ_2 趋于真面积，所以方法 Ⅱ 最为精密可靠。

参 考 文 献

[1] В.И.Бауман，К вопросу о подсчета запасов полезных иекопаемых，*Горный журнал*.Декабрь，1908.

[2] 乌沙阔夫（И.Н.Ушаков），矿藏几何学，煤炭工业出版社，1957.

[3] 雷若夫（П.А.Рыжов），矿体几何学，地质出版社，1957.

[4] 依札克松（С.С.Изаксон），矿产储量计算的验算和计算误差的确定，煤炭工业出版社，1958.

[5] 伏尔科夫（Н.М.Волков），量图原理和方法，1950.

[6] 陆漱芬，在等高线地图上计算地表面面积的问题，测量制量学报，4卷1期，1960.

(原载 1961 年第 1 期“数学学报”)

第二章　挂轮问题

§2.1　引言

挂轮问题是我国一位普通工人庄益敏师傅向我们提出来的。他想知道，怎样从齿数为 20，21，…，100 的齿轮中，选取两对齿轮，使输出速度（或传动比）尽可能接近 π 的最佳齿轮比。这个问题相当于在 20 与 100 之间，找出四个整数 a，b，c，d，使

$$\left|\pi-\frac{a\times b}{c\times d}\right|$$

达到最小。这是一个丢番图逼近问题。问题的一般形式为：

问题：给出实数 α，整数 k（$\leqslant K$）与 l（$\leqslant L$）及两个正整数集合 $X=\{x_1, \cdots, x_k\}$ 与 $Y=\{y_1, \cdots, y_l\}$。求 X 中的 k 个整数 x_{i_1}，…，x_{i_k} 与 Y 中的 l 个整数 y_{j_1}，…，y_{j_l}，使

$$\left|\alpha-\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_k}}{y_{i_1}\cdots y_{j_l}}\right|$$

达到最小。

本章中，我们将利用连分数与 Farey 中项插值，给出解决上面问题的算法。并且给出庄益敏提出的问题的解答，作为这个方法的一个例子。

§2.2 简单连分数

对于任意非整数的实数 α，可以写为

$$\alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1},\ a_0=[\alpha],\ \alpha_1>1,$$

此处 $[\alpha]$ 表示 α 的整数部分。进而言之，若 α_1 不是一个整数，记

$$\alpha_1=a_1+\frac{1}{\alpha_2},\ a_1=[\alpha_1],\ \alpha_2>1.$$

一般地，若 α_{n-1} 不是一个整数，记

$$\alpha_{n-1}=a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n},\ a_{n-1}=[\alpha_{n-1}],\ \alpha_n>1.$$

于是，得 α 的展开式：

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\ddots}}}$$

这里的每一个 $a_i(i\geqslant 1)$ 都是正整数，简单记为

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n} + \cdots$$

或 $$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots]. \qquad (2.1)$$

这称为 α 的简单连分数展开式。如果上面的展开式是有限的，则 α 为有理数，否则 α 为无理数（可以参阅 [3]P 251; [2]PP.135－136）. 因 $[a_0, a_1, \cdots, a_n, 1] = [a_0, a_1, \cdots, a_n+1]$，

所以，如果展开式的最后一个数被规定取大于 1 的整数，则 α 的简单连分数展开式是唯一的。无理数 α 恒有唯一的展开式。

(2.1) 式给出 α 的简单连分数，则有限简单连分数

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

叫做 α 的第 n 个渐近值。

定理 2.1 命 p_n 和 q_n 由

$p_0 = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$,

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ (n\geqslant 2)$,

$q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}\ (n\geqslant 2)$

定义，则 $\frac{p_n}{q_n}$ 是 α 的第 n 个渐近值。

证 在 α 的展开式中，对所有的 $i\geqslant 1$，a_i 为正整数。我们将对 $a_i>0$ 和实数（$i\geqslant 1$）的所有简单连分数来证明这个定理。

由于

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \qquad [a_0, a_1] = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, a_2] = \frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_2a_1+1},$$

所以，对于 $n=0, 1, 2$，定理成立。假定 $m \geqslant 2$ 及定理对于适合 $0 \leqslant n \leqslant m$ 的整数 n 皆成立，则

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}]$$
$$= [a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}]$$

由归纳假设，对于所有的 $0 \leqslant n \leqslant m-1$，这两个简单连分数具有恒同的 p_n 和 q_n。应用归纳假设，对上式的右边取 $n=m$，得到

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}]$$
$$= \frac{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})p_{m-1} + p_{m-2}}{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})q_{m-1} + q_{m-2}}$$
$$= \frac{a_{m+1}(a_mp_{m-1}+p_{m-2})+p_{m-1}}{a_{m+1}(a_mq_{m-1}+q_{m-2})+q_{m-1}}$$
$$= \frac{a_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a_{m+1}q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}.$$

故由归纳法可知定理成立。 □

定理 2.2 我们有

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}, \quad (n \geqslant 1) \tag{2.2}$$

及 $$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n, \quad (n \geqslant 2).$$

证 当 $n=1$ 时，(2.2) 式显然成立。现在假定对于所有小于 n 的正整数，(2.2) 式都成立。则由定理 2.1 可知

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n$$

$$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=p_{n-2}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n-2}=(-1)^{n-1}.$$

故由归纳法可知 (2.2) 式成立。

由定理 2.1 及 (2.2) 式，得

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n$$
$$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=(-1)^na_n.$$

定理证完。 □

命 $\alpha_n=[a_n, a_{n+1}, \cdots]$.

α_n 称为实数 $\alpha=[a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$

的第 n + 1 个完全商。

定理 2.3 我们有

$$\alpha=\alpha_0,\quad \alpha=\frac{\alpha_1a_0+1}{\alpha_1},$$

$$\alpha=\frac{\alpha_np_{n-1}+p_{n-2}}{\alpha_nq_{n-1}+q_{n-2}},\quad (n\geqslant 2).$$

证 由于

$$\alpha=\alpha_0,\quad \alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1}=\frac{\alpha_1a_0+1}{\alpha_1},$$

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\alpha_2}}$$
$$=\frac{\alpha_2(a_1a_0+1)+a_0}{\alpha_2a_1+1}$$
$$=\frac{\alpha_2p_1+p_0}{\alpha_2q_1+q_0},$$

所以，对于 $n \leqslant 2$，定理成立。现在令 $n>2$，并假定对于所有的 $m<n$，定理成立。则

$$\alpha=\frac{\alpha_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}}{\alpha_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3}}$$

$$=\frac{(a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n})p_{n-2}+p_{n-3}}{(a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n})q_{n-2}+q_{n-3}}$$

$$=\frac{\alpha_n(a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3})+p_{n-2}}{\alpha_n(a_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3})+q_{n-2}}$$

$$=\frac{\alpha_n p_{n-1}+p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1}+q_{n-2}},$$

定理证完。 □

定理 2.4 我们有

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})} \quad (n \geqslant 0),$$

在这个条件下，$q_{-1}=0$。

注意，当 $\alpha=[a_0, a_1, \cdots, a_m]$ 时，定理仅对于适合 $0 \leqslant n \leqslant m$ 的整数成立。

证 由定理 2.3 及约定的 $p_{-1}=1$，对 $n \geqslant 0$，我们有

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}$$

$$=\frac{-(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}$$

$$=\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}.$$

定理证完。 □

定理 2.5 我们有

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

及

$$|q_n\alpha-p_n|<|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|.$$

证 由定理 2.4 可知

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}$$

$$\leqslant \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})}=\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

又由定理 2.1 及 2.4 得

$$|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|=\frac{1}{\alpha_n q_{n-1}+q_{n-2}}$$

$$>\frac{1}{(a_n+1)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{1}{q_n+q_{n-1}}$$

$$>\frac{1}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}=|q_n\alpha-p_n|.$$

定理证完。 □

§ 2.3 Farey 贯

将 0 与 1 之间，分母不超过 n 的全体不可约分数，按小到大排列，即得 **n 级 Farey 贯**，记为$\mathscr{F}_n$。因此，当

$$0\leqslant a\leqslant b\leqslant n \quad 及 \quad (a, b)=1$$

时，$\frac{a}{b}\in\mathscr{F}_n$，这里 (a, b) 表示 a 和 b 的最大公约数。如果$\frac{a}{b}$

与$\frac{a'}{b'}$为 Farey 贯$\mathscr{F}_n$的两相邻项，则

$$\frac{a+a'}{b+b'}$$

为它们的 **Farey 中项**。

定理 2.6 假定 a，a'，b 和 b' 为适合

$$a'b-ab'=1$$

的四个正整数。则在$\frac{a}{b}$与$\frac{a'}{b'}$之间没有分母小于 $b+b'$ 或分子小于 $a+a'$ 的分数。

证 因为$\frac{a}{b}$和$\frac{a'}{b'}$可以分别换为$\frac{b'}{a'}$和$\frac{b}{a}$，所以，只要证明在$\frac{a}{b}$和$\frac{a'}{b'}$之间没有分母小于 $b+b'$ 的分数即足。

显然
$$\frac{a}{b}<\frac{a+a'}{b+b'}<\frac{a'}{b'}$$

及
$$(a+a')b-a(b+b')=a'(b+b')-(a+a')b'$$
$$=a'b-ab'=1,$$

所以，$(a+a',\ b+b')=1$。在区间 $(\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'})$ 中，除$\frac{a+a'}{b+b'}$之外的每一个分数 α 必须满足下面两个不等式之一:

$$\frac{a}{b}<\alpha<\frac{a+a'}{b+b'} \text{ 与 } \frac{a+a'}{b+b'}<\alpha<\frac{a'}{b'}.$$

所以，只要证明在$\frac{a}{b}$与$\frac{a'}{b'}$之间没有分母 $<\mathrm{MAX}\ \{b,\ b'\}$ 的分数即足。

假定$\frac{a''}{b''}$满足于

$$\frac{a}{b} < \frac{a''}{b''} < \frac{a'}{b'} \text{ 与 } b'' < \text{MAX}\{b, b'\}.$$

若 $b'' \geqslant b$，则 $b'' < b'$，并且

$$\frac{a''}{b''} - \frac{a}{b} = \frac{a''b - ab''}{bb''} \geqslant \frac{1}{b'b''} > \frac{1}{bb'} = \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b},$$

这是矛盾的。若 $b' < b$，则 $b'' < b$，并且

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a''}{b''} = \frac{a'b'' - a''b'}{b'b''} \geqslant \frac{1}{b'b''} > \frac{1}{bb'} = \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b},$$

这仍是矛盾的。定理证完。 □

由此立刻推出，如果 $\frac{a'}{b'} \leqslant 1$，则 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a'}{b'}$ 是 Farey 贯 $\mathscr{F}_{b+b'-1}$ 的相邻两项，而

$$\frac{a+a'}{b+b'}$$

是它们的 Farey 中项。

§ 2.4 问题的算法

本节，我们将给出 § 2.1 所述问题的求解过程。假设

$$\frac{(\text{MIN } X)^k}{(\text{MAX } Y)^2} < \alpha < \frac{(\text{MAX } X)^k}{(\text{MIN } Y)^l},$$

否则，问题的解答是明显的。

1）将 α 展开成简单连分数

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots].$$

由定理 2.2、2.4 与 2.5 可知，α 的渐近值满足于

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\cdots<\frac{p_{2m}}{q_{2m}}<\cdots<\alpha<\cdots<\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$$

$$<\cdots<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_1}{q_1} \tag{2.3}$$

及 $$\cdots<\left|\alpha-\frac{p_m}{q_m}\right|<\left|\alpha-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right|<\cdots<\left|\alpha-\frac{p_0}{q_0}\right|. \tag{2.4}$$

命 $x=\underset{i}{\mathrm{MAX}}\,x_i$，$y=\underset{j}{\mathrm{MAX}}\,y_j$.

又命 n 表示使 $p_n\leqslant x^k$ 与 $q_n\leqslant y^l$

同时成立的最大整数。则由定理 2.2 与 2.6 可知，在$\frac{p_n}{q_n}$ 与$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 之间没有分母 $\leqslant y^l$ 和分子 $\leqslant x^k$ 的分数，换言之，没有满足我们问题要求的分数。因此，我们应该首先在$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 与$\frac{p_n}{q_n}$ 之间寻求适合我们问题要求的分数。

2）不失一般性，我们可以假设 n 是奇数。则

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\alpha<\frac{p_n}{q_n}.$$

故由定理 2.6 可知，在区间 $\left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \frac{p_n}{q_n}\right]$ 中，所有分母 $\leqslant y^l$ 而分子 $\leqslant x^k$ 的分数，可以在 Farey 中项

$$\frac{p_{n-1}+p_n}{q_{n-1}+q_n},\ \frac{2p_{n-1}+p_n}{2q_{n-1}+q_n},\ \frac{p_{n-1}+2p_n}{q_{n-1}+2q_n},\ \cdots$$

中寻找。从这些 Farey 中项中可得到所有形如

$$\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_k}}{y_{j_1}\cdots y_{j_l}}$$

的分数。如果有这种分数，并且其中距 α 最近的是$\frac{a}{b}$。若

$$\left|\frac{a}{b}-\alpha\right| \leqslant \left|\frac{p_n}{q_n}-\alpha\right| \tag{2.5}$$

则由 (2.3) 式与 (2.4) 式可知，$\frac{a}{b}$ 就是我们的问题的解答。

另一方面，如果在上述分数中没有适合我们要求的分数，或者 (2.5) 式不满足，那么，还需要继续依次在区间

$$\left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right],\ \left[\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}},\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right],\left[\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}},\frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}\right],\cdots$$

中用 Farey 中项来寻找，如此下去，直到问题解决。

§ 2.5　挂轮问题的求解

问题　在 20 与 100 之间寻找四个整数 a，b，c，d，使 $\left|\pi-\frac{ab}{cd}\right|$ 达到最小。

解　1) π展开成简单连分数为

$$\pi = [3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ \cdots].$$

它的渐近值依次为

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \cdots.$$

用 § 2.4 的记号，则 $k=l=2$，$x^2=y^2=10000$ 及 $n=3$，我

们开始在区间 $\left[\frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right]$ 中寻找适合我们问题要求的形如 $\frac{ab}{cd}$ 的分数。

2) 我们来确定分子和分母都 ≤ 10,000的形为

$$\frac{333+(k\times 355)}{106+(k\times 113)}$$

的 Farey 中项。它们是

$$\begin{aligned}\frac{333}{106}&<\frac{688}{219}<\frac{1043}{332}<\frac{1398}{445}<\frac{1753}{558}<\frac{2108}{671}<\frac{2463}{784}\\&<\frac{2818}{897}<\frac{3173}{1010}<\frac{3528}{1123}<\frac{3883}{1236}<\frac{4238}{1349}<\frac{4593}{1462}\\&<\frac{4948}{1575}<\frac{5303}{1688}<\frac{5658}{1801}<\frac{6013}{1914}<\frac{6368}{2027}<\frac{6723}{2140}\\&<\frac{7078}{2253}<\frac{7433}{2366}<\frac{7788}{2479}<\frac{8143}{2592}<\frac{8498}{2705}<\frac{8853}{2818}\\&<\frac{9208}{2931}<\frac{9653}{3044}<\frac{9918}{3157}<\frac{355}{113}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

除

$$\frac{2108}{671}=\frac{62\times 68}{22\times 61}$$

外，(2.6) 式中所有的分数均不能表为 $\frac{ab}{cd}$，其中 a，b，c，d 为 20 与 100 之间的整数。由于

$$\frac{2108}{671}<\pi,$$

所以，小于 $\frac{2108}{671}$ 的分数与 Farey 中项已不必要再考虑。下面

列出了在$\frac{333}{106}$与$\frac{355}{113}$之间$\geqslant\frac{2108}{671}$的及分子与分母都$\leqslant$ 10,000的所有Farey中项。注意，这个数列可以由（2.6）式中$\geqslant\frac{2108}{671}$的Farey中项分数数列导出。我们有

$$\begin{aligned}\frac{2108}{671}&<\frac{8787}{2797}<\frac{6679}{2126}<\frac{4571}{1455}<\frac{7034}{2239}<\frac{9497}{3023}<\frac{2463}{784}\\&<\frac{7744}{2465}<\frac{5281}{1681}<\frac{8099}{2578}<\frac{2818}{897}<\frac{8809}{2804}<\frac{5591}{1907}\\&<\frac{9164}{2917}<\frac{3173}{1010}<\frac{9874}{3143}<\frac{6701}{2133}<\frac{3528}{1123}<\frac{7411}{2359}\\&<\frac{3883}{1236}<\frac{8121}{2585}<\frac{4238}{1349}<\frac{8831}{2811}<\frac{4593}{1462}<\frac{9541}{3037}\\&<\frac{4948}{1575}<\cdots<\frac{355}{113},\end{aligned}$$

$\frac{4948}{1575}$与$\frac{355}{113}$之间的Earey中项，已经在（2.6）式中给出。其中除

$$\frac{7744}{2465}=\frac{88\times 88}{29\times 85}$$

外，均不能表成所需的$\frac{ab}{cd}$之形式。由于

$$\left|\frac{7744}{2465}-\pi\right|>\left|\frac{355}{113}-\pi\right|,$$

所以，还需在区间$\left[\frac{333}{106},\ \frac{22}{7}\right]$中继续搜寻。

3）由于

$$\frac{7744}{2465}<\pi<\frac{355}{113},$$

所以，只要在区间$\left[\frac{355}{113}, \frac{22}{7}\right]$中寻找即足。我们来确定分子和分母都 $\leqslant 10{,}000$ 的形为

$$\frac{(k \times 355)+22}{(k \times 113)+7}$$

的 Farey 中项。它们是

$$\begin{aligned}\frac{355}{113} &< \frac{9962}{3171} < \frac{9607}{3058} < \frac{9252}{2945} < \frac{8897}{2832} < \frac{8542}{2719} < \frac{8187}{2606} \\ &< \frac{7832}{2493} < \frac{7477}{2380} < \frac{7122}{2267} < \frac{6767}{2154} < \frac{6412}{2041} < \frac{6057}{1928} \\ &< \frac{5702}{1815} < \frac{5347}{1702} < \frac{4992}{1589} < \frac{4637}{1476} < \frac{4282}{1363} < \frac{3927}{1250} \\ &= \frac{11 \times 355 + 22}{11 \times 113 + 7} \quad < \cdots < \frac{22}{7} \qquad (2.7)\end{aligned}$$

其中除 $\quad \frac{3927}{1250} = \frac{51 \times 77}{25 \times 50}$

外，(2.7) 式中 $<\frac{3927}{1250}$ 的所有分数，均不能表为所需形式。由于

$$\pi < \frac{3927}{1250},$$

所以，大于$\frac{3927}{1250}$的分数已不必要再考虑。由$\frac{355}{113}$与$\frac{22}{7}$之间得到的 $\leqslant \frac{3927}{1250}$ 的 Farey 中项，其分子和分母都 $\leqslant 10{,}000$，在 (2.7) 式中又未曾包含进去的，都列在下面。注意，它们可以由 (2.7) 式中分子 $\leqslant 5{,}000$ 的分数，取 Farey 中项导出。这样，还有

$$\frac{4992}{1589}<\frac{9629}{3065}<\frac{4637}{1476}<\frac{8919}{2839}<\frac{4282}{1363}<\frac{8209}{2613}<\frac{3927}{1250}.$$

上面所有的分数皆不能表成所需的形式。因

$$\left|\frac{3927}{1250}-\pi\right|<\left|\frac{7745}{2465}-\pi\right|$$

所以，我们问题的解答为：$a=51$，$b=77$，$c=25$，$d=50$。

附记：这个问题的计算过程很容易用 ALGOL 60 语言写出，上面的例子在中国科学院数学研究所的电子计算机 DJS−21 上计算，所需时间为 90 秒。

参 考 文 献

〔1〕陈德泉，吴方与齐景泰，"挂轮计算问题的精确解"，数学的实践与认识，3，1975，pp.30−40.

〔2〕Hardy G.H.and E.M.Wright， An Introduction to the Theory of Numbers，4th ed.Clarendon Press， Oxford， 1960.

〔3〕华罗庚，数论导引，科学出版社，北京，1956，Springer Verlag，1982.

〔4〕华罗庚，高等数学引论，卷Ⅰ，科学出版社，北京，1963.

第三章　优选法（单因素）

§3.1　引言

优选法（Optimum seeking method，又叫寻优法 Optimum search method）是尽可能少做试验，尽快找到生产工艺过程最优方案的方法，也就是安排试验的科学方法。从 1970 年到 1982 年，跟很多工业部门长期的接触中，我们发现这是一个很适宜于普及的数学方法。

本章所讲的黄金分割法、分数法（或 Fibonacci 法），对分法及抛物线法，都是一些常用的适于普及的方法。在这些方法中，都只考虑生产过程中的一个主要因素，对这一因素进行优选，使之达到最优。然后，再逐个考虑其它的因素。在下章，我们将讨论多因素的优选法。

现在，我们列举一些我们解决过的实际问题于后。

1）化学工业。

从二百种原料中，选择构成液晶的三种主要元素的最佳组

合（及它们的配比），以达到所要求的颜色和灵敏度。

2）石油工业。

选择石油裂解塔中必须的压力、温度及流量。

3）煤矿。

选择挖掘面上炸药炮眼的深度和间距，以达到爆破的要求，并降低炸药的消耗。

4）机械制造。

a）金属切削：选择最佳转速和进刀速度，或者选择刀具的最佳角度。

b）焊接：为了得到好的焊接表面质量，选择最佳电流,并降低焊接材料的消耗。

5）电子工业。

a）半导体元件加工：选择最佳技术参数，例如粘结温度(熔点的三分之二并不够好)。

b）检验和调试新仪器：通过最少次数的试验以得到所要求的结果。

6）纺织工业。

选择各种主要的染色成分的最佳组合和用量，以改进染色质量。

7）冶金。

选择化铁炉的最佳电流,选择特种钢的冶炼与钒的提炼的最佳工艺过程。

8）动力工业。

在锅炉上，选择喷管的最佳直径和喷射角度，以提高热效率和减少空气污染。

9）建筑材料。

在水泥制造过程中，选择窑的最佳转速以减少周期时间和

增加产量。

10) 食品工业。

改进糖果与糕点加工的工艺过程。

§ 3.2 单峰函数

我们假定 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的**单峰函数**，即 $f(x)$ 是连续函数且存在 $x_0 \in (a, b)$，使 $f(x)$ 在区间 $(a, x_0]$ 中递增（或递减），而在区间 $[x_0, b)$ 中递减（或递增），x_0 称为 $f(x)$ 的极大点（或极小点）. 不失一般性，在本章中，我们假定 $f(x)$ 是具有极大点的单峰函数。注意，函数 $f(x)$ 的表达式，我们并不需要知道，在任何 x 点处，它的值可以通过实验以求得。那么，如何最有效地求得 $f(x)$ 的极大点（或它的一个充分邻近的点）的位置？

最简单的方法是**等分法**，即将诸实验安排在

$$x_k = a + \frac{k}{n+1}(b-a), \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

处做，然后得函数值 $y_k = f(x_k)$，$1 \leqslant k \leqslant n$。假定 y_m 是诸 y_k 中的最大者，则 $f(x)$ 的极大点必含于区间

$$\left(a + \frac{m-1}{n+1}(b-a),\ a + \frac{m+1}{n+1}(b-a)\right)$$

之中。

等分法所需的试验次数太多。确切地说，如果我们需要求出一个长度不超过 ε，且包含 $f(x)$ 的极大点的小区间，则所需试验的次数具有数量级 $\frac{1}{\varepsilon}$。

§ 3.3 来回调试法

我们经常使用**来回调试法**。取一点 x_1 做实验，得 $y_1 = f(x_1)$。再取另一点 $x_2 (> x_1)$ 做实验，得 $y_2 = f(x_2)$（见图 3.1）。若 $y_2 > y_1$，则 $f(x)$ 的极大点显然不在区间 $(a, x_1]$ 之中，所以，只需在区间 (x_1, b) 中寻求 $f(x)$ 的极大点。类似地，若 $y_2 < y_1$，则只要考虑区间 (a, x_2) 即可。$y_2 = y_1$ 时，则考虑区间 (x_1, b) 或 (a, x_2) 均可。不失一般性，我们假定 $y_2 > y_1$。在 (x_1, b) 中取第三个实验点 x_3，求得相应的 $y_3 = f(x_3)$。比较 y_3 和 y_2，如前一样，将区间 (x_1, b) 中包有较小函数值的对应区间去掉，如此等等，直到 $f(x)$ 的极大点或其充分邻近的点被找到为止。

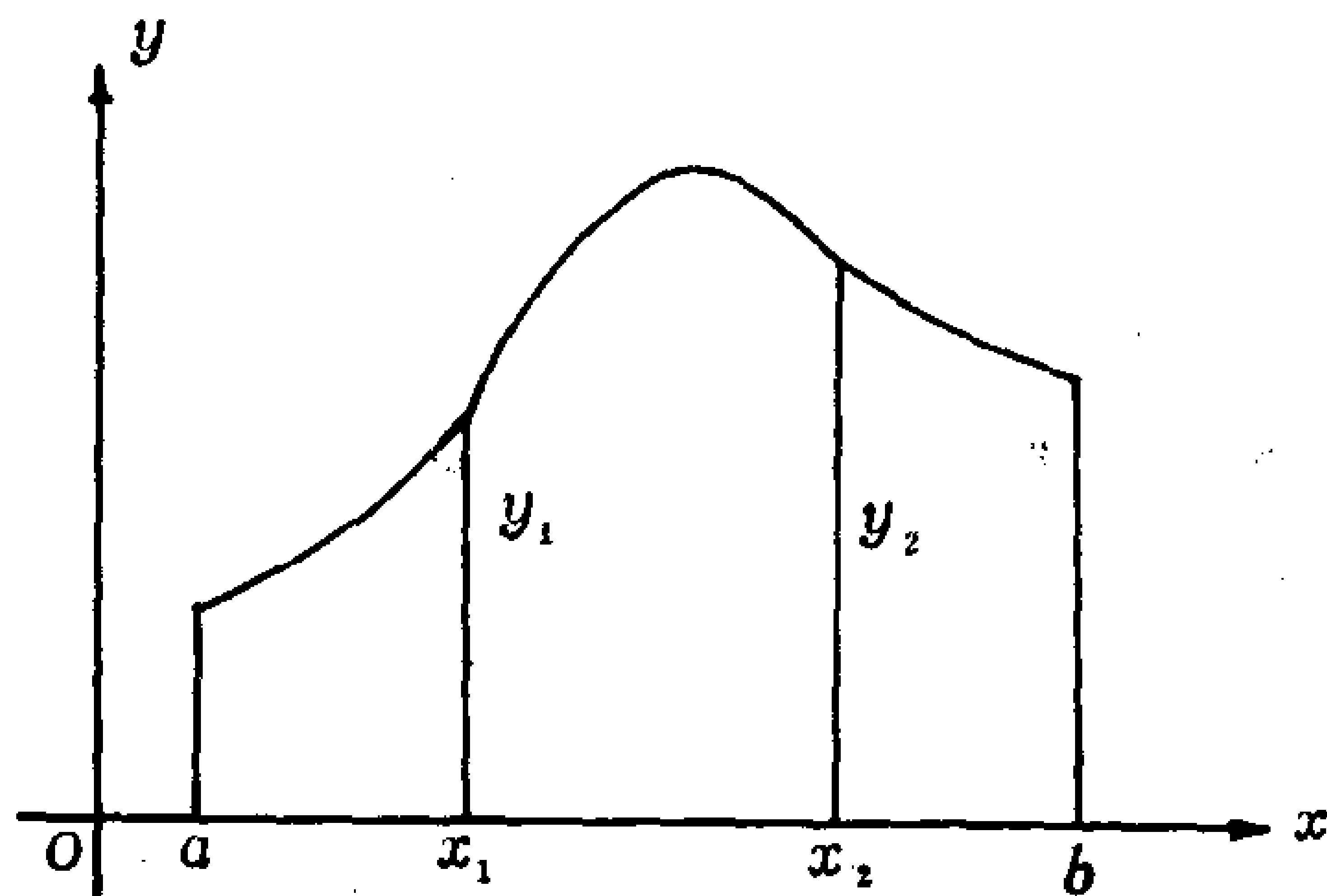


图 3.1

§ 3.4 黄金分割法

一个很自然的问题是在来回调试法中，是否有一个选择“试验点” x_1，x_2，…… 的规律，能最快地求得 $f(x)$ 的极大点？这个问题是 J.Kiefer 于 1953 年解决的。因他的方法与初等几何中的黄金数有关，故称为黄金分割法。命

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887\cdots$$

ω称为黄金数，它适合二次方程

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0。$$

不失一般性，我们可以假定选作实验的区间为 (0，1)。**黄金分割法**可以描述如下：第一个试验点选在 ω 处，第二个试验点取在它的对称位置 $(1-\omega)$ 处（见图 3.2)。



图 3.2

比较这两点所得的试验结果。若在 ω 处的结果好些，则甩掉区间 $(0,\ 1-\omega]$，否则，我们将区间 $[\omega,\ 1)$ 甩掉。无论哪种情况，留下的区间长度都等于 ω，即等于最初选作实验区间长度的 ω 倍，而且其中包含有一个已作过实验的试验点 (ω 或 $1-\omega$)，它将留下的区间分成两部分，这两部分所成的比例，恰如 ω 或 $1-\omega$ 划分区间 (0，1) 所成的比例一样。详言之，如果去掉的区间为 $[\omega,\ 1)$，则留下的区间为

$$0 < 1-\omega = \omega^2 < \omega,$$

它恰为区间

$$0<\omega<1$$

的 ω 倍。反之，若去掉的区间为 $(0, 1-\omega]$，则留下的区间是

$$1-\omega<(1-\omega)+\omega(1-\omega)<(1-\omega)+\omega=1,$$

它是区间 $0<1-\omega<1$ 的 ω 倍，只是一起向右边移动了一个尺寸 $1-\omega$。因此，经过 n 次试验之后，留下的区间长度为

$$g_n=\omega^{n-1}。$$

这意味着，如果我们应用黄金分割法，需要找出一个长度 $<\varepsilon$，且包含有函数 f 的极大点的小区间，则所需的试验最少次数 n 应满足

$$\omega^{n-1}<\varepsilon<\omega^{n-2},$$

即 n 的阶为 $\ln\frac{1}{\varepsilon}$。这比等分法的阶小多了。

命 $\mathscr{U}$ 表示 $(0, 1)$ 上具有极大点的全体单峰函数所成的集合。对于任意 $f\in\mathscr{U}$ 及一个来回调试法 A，命 $\Delta_n(A, f)$ 表示经过 n 次试验之后，含有 f 极大点的留下区间的长度。又命

$$\Delta_n(A)=\underset{f\in\mathscr{U}}{\mathrm{MAX}}\,\Delta_n(A, f),$$

$\Delta_n(A)$ 称为方法 A 经过 n 次试验后得到的 Δ— 误差。当 A 是黄金分割法时，显然 $\Delta_n(A)=g_n$。

定理 3.1　任意给出的来回调试法 A，它不是黄金分割法，则一定存在正整数 N，当 $n>N$ 时，A 的 Δ— 误差 $\Delta_n(A)$ 满足

$$\Delta_n(A)>g_n.$$

附记　研究 § 0.4给出的例子。若用0.618代替黄金数 ω，则用16次试验即可找到最佳温度。例如，假定1001℃是最佳温度，则诸试验依次安排在1618℃，1382℃，1236℃，

1146℃，1090℃，1056℃，1034℃，1022℃，1012℃，1010℃，1002℃，1008℃，1006℃，1004℃，1003℃，1001℃。

§3.5 定理3.1的证明

命$F_n(n=0, 1, \cdots)$为由递推公式

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ (n\geqslant 2)$$

定义的整数贯。这一贯称为 **Fibonacci 贯**，其中 F_n 称为第 n 个 Fibonacci 数。

引理3.1 我们有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^{-n}-(-\omega)^n),\ n=0,\ 1,\ \cdots。$$

证 由于 $\omega^{-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以，对 $n=0$ 和 $n=1$，上式成立。现在假定 $n\geqslant 2$ 及引理对于所有小于 n 的非负整数都成立。则

$$\begin{aligned}F_n&=F_{n-1}+F_{n-2}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^{-n+1}-(-\omega)^{n-1}+\omega^{-n+2}-(-\omega)^{n-2})\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^{-n+1}(1+\omega)-(-\omega)^{n-1}(1-\omega^{-1}))\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\omega^{-n}-(-\omega)^n),\end{aligned}$$

故由归纳法可知引理成立。

命A是来回调试法。用Δ_n代替$\Delta_n(A)$。 □

引理3.2 我们有

$$\Delta_n=F_{k+1}\Delta_{n+k}+F_k\Delta_{n+k+1},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

$=0, 1, \cdots$ (3.1)

证 当 $k=0$ 时，(3.1) 式显然成立。当 $k=1$ 时，我们需要证明

$$\Delta_n \leqslant \Delta_{n+1}+\Delta_{n+2},\quad n=1, 2, \cdots \tag{3.2}$$

我们仅对于 $n=1$ 来证明 (3.2) 式，因当 $n>1$ 时，证明是完全类似的。假定开始的两个试验点是 x_1 与 x_2，此处 $x_1<x_2$。若 $x_1+x_2\geqslant 1=\Delta_1$，则 $\Delta_2\geqslant x_2$，且对于任意选择第三个试验点 x_3 皆有 $\Delta_3\geqslant x_1$。所以，

$$\Delta_1=1\leqslant x_2+x_1\leqslant \Delta_2+\Delta_3。$$

反之，若 $x_1+x_2<1$，则 $\Delta_2\geqslant 1-x_1$ 及对于任意选择第三个试验点 x_3 皆有 $\Delta_3\geqslant 1-x_2$. 所以，

$$\begin{aligned}\Delta_2+\Delta_3&\geqslant(1-x_1)+(1-x_2)\\&=2-(x_1+x_2)>1=\Delta_1,\end{aligned}$$

因此，(3.2)式对于$n=1$成立。

假定 $k\geqslant 1$ 与对于 k 及所有整数 $n\geqslant 1$，(3.1) 式皆成立。我们来证明 (3.1) 式对于 $k+1$ 及所有 $n\geqslant 1$ 亦成立。由 (3.2) 式可知

$$\begin{aligned}\Delta_n&\leqslant F_{k+1}\Delta_{n+k}+F_k\Delta_{n+k+1}\\&\leqslant F_{k+1}(\Delta_{n+k+1}+\Delta_{n+k+2})+F_k\Delta_{n+k+1}\\&=(F_{k+1}+F_k)\Delta_{n+k+1}+F_{k+1}\Delta_{n+k+2}\\&=F_{k+2}\Delta_{n+k+1}+F_{k+1}\Delta_{n+k+2}.\end{aligned}$$

故由归纳法可知引理成立。 □

引理3.3 我们有

$$g_n=F_{k+1}g_{n+k}+F_kg_{n+k+1},$$
$$n=1, 2, \cdots, k=0, 1, \cdots \tag{3.3}$$

证 当$k=0$时，(3.3)式显然成立。由于

$$\omega^{n-1}(\omega^2+\omega-1)=0,$$

即 $$g_n = g_{n+1} + g_{n+2},$$

故对于$k=1$，(3.3)式成立。引理易由归纳法证明。 □

定理 3.1 的证明 若定理不成立，则存在一个来回调试法 A，它不是黄金分割法，且有正整数贯 $n_1 < n_2 < \cdots$，

使 $$\Delta_{n_i} \leqslant g_{n_i}, \quad i=1, 2, \cdots \tag{3.4}$$

对于任意给出的正整数 n，皆存在 n_i，使 $n < n_{i_0}$ 不失一般性，我们可以假定 $i=1$，并记 $n_0 = n$。由引理 3.2 可知

$$\Delta_n = \Delta n_0 \leqslant F_{n_1 - n_0 + 1} \Delta_{n_1} + F_{n_1 - n_0} \Delta_{n_1 + 1}.$$

命$S \geqslant 2$。由于

$$\Delta_{n_i + 1} \leqslant F_{n_{i+1} - n_i} \Delta_{n_{i+1}} + F_{n_{i+1} - n_{i-1}} \Delta_{n_{i+1} + 1}$$
$$i = 1, \cdots, s-1,$$

可知

$$\begin{aligned}\Delta n &\leqslant F_{n_1 - n_0 + 1} \Delta_{n_1} + F_{n_1 - n_0} (F_{n_2 - n_1} \Delta_{n_2}) \\ &\quad + F_{n_2 - n_1 - 1} \Delta_{n_2 + 1} \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant F_{n_1 - n_0 + 1} \Delta_{n_1} + F_{n_1 - n_0} F_{n_2 - n_1} \Delta_{n_2} + \cdots \\ &\quad + F_{n_1 - n_0} F_{n_s - n_{s-1}} \prod_{i=1}^{s-2} F_{n_{i+1} - n_i - 1} \Delta_{n_s} \\ &\quad + F_{n_i - n_0} \prod_{i=1}^{s-1} F_{n_{i+1} - n_i - 1} \Delta_{n_s + 1}\end{aligned}$$

类似地，由引理3.3可知

$$\begin{aligned}g_n &\leqslant F_{n_1 - n_0 + 1} g_{n_1} + F_{n_1 - n_0} F_{n_2 - n_1} g_{n_2} + \cdots \\ &\quad + F_{n_1 - n_0} F_{n_s - n_{s-1}} \prod_{i=1}^{s-2} F_{n_{i+1} - n_i - 1} g_{n_s} \\ &\quad + F_{n_1 - n_0} \prod_{i=1}^{s-1} F_{n_{i+1} - n_i - 1} g_{n_s + 1}.\end{aligned}$$

由于(3.4)式及　$\Delta_{n_s+1} \leqslant \Delta_{n_s} \leqslant g_{n_s}$，
由引理3.3可得

$$\Delta_n - g_n \leqslant F_{n_1-n_0} \prod_{i=1}^{s-1} F_{n_{i+1}-n_i-1}(g_{n_s} - g_{n_s+1})$$
$$= F_{n_1-n_0} \prod_{i=1}^{s-1} F_{n_{i+1}-n_i-1} g_{n_s+2}.$$

由引理 3.1 可知 $F_n \leqslant \frac{\omega^{-n+1}}{\sqrt{5}}(\omega^{-1}+\omega) = \omega^{-n+1}$，

所以，

$$\Delta_n - g_n \leqslant \omega^{-n_1+n_0+1} \prod_{i=1}^{s-1} \omega^{-n_{i+1}+n_i+2} \omega^{n_s+1}$$
$$= \omega^{n+2s}.$$

命$s \to \infty$，则得$\Delta_n \leqslant g_n$，$n = 1, 2, \cdots$
因为A不是黄金分割法，所以存在正整数m，使$\Delta_m < g_m$.
故由引理3.2与3.3得出

$$1 = \Delta_1 \leqslant F_m \Delta_m + F_{m-1} \Delta_{m+1}$$
$$< F_m g_m + F_{m-1} g_{m+1} = g_1 = 1,$$

此为矛盾。因此定理成立。 □

§ 3.6　分数法

有时，一个工艺过程的参数不是连续变化的。比如，一台车床只有有限个速度档。这时候，

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887\cdots$$

或 0.618 就难以用上。这种情况下，连分数理论 (见第二章)

能起重要作用。将 ω 展开成简单连分数

$$\omega=[0,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots],$$

其渐近分数依次为

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{F_n}{F_{n+1}},\ \cdots$$

假定共有$F_{n+2}-1$个点：1，2，…，$F_{n+2}-1$ (3.5)

可作为试验点。类似于黄金分割法，但用$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 代替 ω. 第一个试验点取在 F_{n+1}，而第二个试验点取在它对称位置的点处，即 $F_{n+2}-F_{n+1}=F_n$. 比较这两点的试验结果，如果在 F_{n+1} 处的结果比 F_n 处的结果好些，则抛掉点 $1,\cdots,F_n$，否则，抛去点 F_{n+1}，…，$F_{n+2}-1$。我们不妨假定在 F_n 处的结果好些。则第三个试验点取在 F_n 的对称位置，即

$$F_{n+1}-F_n=F_{n-1},$$

如此等等，直到经过 n 次试验，单峰函数在 (3.5) 式上的极大点被找到为止。

如果可以作为试验点的点数m满足

$$F_{n+1}<m<F_{n+2}-1,$$

则可以添加$F_{n+2}-m-1$个虚拟点

$$m+1,\ m+2,\ \cdots,\ F_{n+2}-1,$$

并且假定在这些点的试验结果与点 m 的试验结果相同，则这个情况又化为 $F_{n+2}-1$ 个点的情况。在有限阶集上对单峰函数选优的方法，叫做 Fibonacci 寻优法。

任意给出来回调试法 A 及$f\in\mathscr{U}$，命 $\Phi_n(A,\ f)$ 为最大的试验点数，使用方法 A，经 n 次试验，可以决定 f 在这些点中的极大点。命

$$\varphi_n(A)=\mathrm{MIN}_{f\in\mathscr{U}}\varphi_n(f,\ A).$$

φ_n称为方法A经n次试验的φ—数。则

$$f_n = F_{n+2} - 1。$$

我们有以下定理。

定理3.2 命$\Phi_n = \mathrm{MAX}_A \varphi_n(A)$，则 $\Phi_n = f_n$.

§ 3.7 定理3.2的证明

若 $n=1$，则 $\Phi_1 = 1$。若 $n=2$，则任意f的极大点可以由比较两个试验结果得到，所以 $\Phi_2 = 2$。一般言之，假定 B 是来回调试法及 $g \in \mathscr{U}$，则

$$\Phi_n = \varphi_n(B) = \Phi_n(\varphi, g)。$$

命$f \in \mathscr{U}$是定义域包含 Φ_n 个点的任意函数。假定方法 B 令最初的两次试验是在 Φ_n 个点中的 x_1 和 x_2 点处进行。这里，x_1 是位于左起的第 $(a+1)$ 点处，x_2 位于左起的第 $(a+b+2)$ 点处，x_2 的右边还有 c 个点，如图 3.3 所示。则

$$\Phi_n = a + b + c + 2. \tag{3.6}$$



图 3.3

若 x_1 处的试验结果比 x_2 处的结果好，则函数f的极大点必在图 3.4 所示的点中去取。用方法 B，我们能够在图 3.4 中给出的定义域中，包括 x_1 处的试验在内，安排 $n-1$ 次试验，去决定函数f的极大点。所以，

$$a + b + 1 \leqslant \varphi_{n-1}(B, f),$$

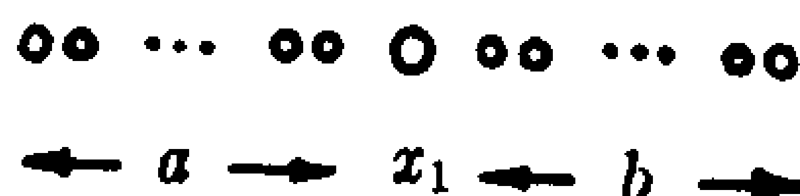


图 3.4

因为f 是任意的，有

$$a+b+1\leqslant\varphi_{n-1}(B)\leqslant\Phi_{n-1}。\qquad(3.7)$$

由于用方法 B 可以安排在图 3.4 左端 a 个点中的试验次数最多为 $n-2$，所以

$$a\leqslant\varphi_{n-2}(B,f),$$

因为f 是任意的，有

$$a\leqslant\varphi_{n-2}(B)\leqslant\Phi_{n-2}。\qquad(3.8)$$

类似地，如果x_2对函数给出较好的试验结果，则

$$b+c+1\leqslant\Phi_{n-1}\quad 及\quad c\leqslant\Phi_{n-2}。\qquad(3.9)$$

故由(3.6)、(3.7)、(3.8)与(3.9)式可知

$$\varphi_n\leqslant\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}+1.$$

此处等号当且仅当 (3.7)、(3.8) 与 (3.9) 式中的等号均成立时成立。这等价于

$$a=c=\Phi_{n-2}\quad(对称性)$$

及 $\quad a+b+1=b+c+1=\Phi_{n-1}.$

将等式 $\Phi_n=\Phi_{n-1}+\Phi_{n-2}+1$

写为递推公式 $\Phi_n+1=(\Phi_{n-1}+1)+(\Phi_{n-2}+1)$

形式。定义

$$F_0=0,\ F_1=F_2=1\ 及\ F_{n+2}=\Phi_n+1(n\geqslant 1)。$$

则$F_0=0$，$F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2)$，

即$F_n(n=0, 1, \cdots)$为Fibonacci贯，定理证完。 □

当变数连续变化时，我们也可以应用分数法。特别若试验次数是一个预先规定的数时，使用分数法则更为方便。进而言之，我们可以将区间 (0, 1) 分成 F_{n+2} 等分，而用 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 代替 0.618。第一个试验安排在$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，而第二个试验

安排在$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$的对称位置，即

$$1-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=\frac{F_n}{F_{n+2}},$$

如此等等。经过 n 次试验之后，我们得到长度为$\frac{2}{F_{n+2}}$且包含有函数 f 的极大点的留下区间。因此，经 n 次试验，分数法的 Δ— 误差为

$$\Delta_n=\frac{2}{F_{n+2}}。$$

附记 取 §0.4 所示的例子，由于 $F_{17}=1597$，所以，15 次试验即可求出 1000℃～2000℃ 中的最佳温度，这比用黄金分割法可以省掉一次试验（见 §3.4)。

§3.8 对分法

我们已经介绍了在一个区间内求单峰函数最优值的两个方法。在实际中还有不少问题，其每次试验的结果只是两种状态之一：对与否。比如：

——如何尽快地找出电路、下水道、输油管、机器或仪器的故障？

——如何定出砂轮或转子的静平衡？

——在保证质量的前提下，如何降低原材料的消耗？

——在保证生产的前提下，如何降低成本？

处理这类问题，我们建议用**对分法代替黄金分割法**。

例如，假设有一条 10 公里长的输电线路出了故障，在线

路一端 A 处有电，而在另一端 B 处没有电，要求尽可能快地查出断头位置。我们先在线路 AB 的中点 C 处检查，如果 C 处有电，说明故障在 CB 一段中，再在 CB 的中点 D 处检查，如果 D 处无电，说明断头在 CD 部分，再在 CD 的中点 E 处检查，如此等等，直到找出输电线路的断头为止(见图 3.5)。



图 3.5

我们再举一个例子。假定一种产品需用某种材料(它的量用 x 表示)，又设有函数 $f(x)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则产品符合标准，否则 $f(x)<0$。假如我们有了 $f(x_0)<0$ 与 $f(x_1)\geqslant 0$，这里 $x_0<x_1$，则下一个试验可用 $\frac{(x_0+x_1)}{2}$ 进行，等等。

对分法最简单，但在实践的应用中非常普遍。假定原来做实验的区间的长度为 L，则做过一次试验之后，留下的区间的长度为 $\frac{L}{2}$。依此类推，做过 n 次试验之后，留下的区间的长度为 $\frac{L}{2^n}$。显而易见，对分法所需试验次数的数量级是 $\ln\frac{1}{\delta}$，其中 δ 是预先给定的精度，即含有出故障的满意的区间的长度与初始区间的长度之比。

§ 3.9 抛物线法

无论黄金分割法还是分数法，只比较每一次迭代中的两

个试验结果，并不管试验的实际值，即目标函数值。现在，我们建议一个寻求函数极大点的有效方法，它将用到试验值。例如，假定在 x_1，x_2，x_3 处做试验，分别得到 $f(x)$ 的函数值 y_1，y_2，y_3，此处 $x_1<x_2<x_3$。则由 Lagrange 插值法可得一个二次函数

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

此处，当 $x=x_i$ 时，$y=y_i(i=1, 2, 3)$。这一函数的图形是一条抛物线，其极大点由方程

$$y_1\frac{2x-x_2-x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{2x-x_3-x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+y_3\frac{2x-x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0$$

给出，即

$$x_4=\frac{y_1(x_2^2-x_3^2)+y_2(x_3^2-x_1^2)+y_3(x_1^2-x_2^2)}{2(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))}.$$

下一次试验点即取 x_4。假定在 x_4 处的试验结果是 y_4，并假定 y_1，y_2，y_3 和 y_4 中的最大值是由 x_i' 给出的。除 x_i' 之外，在 x_1，x_2，x_3 和 x_4 中取较靠近 x_i' 的两点。将这三点记为 x_1'，x_2'，x_3'，此处，$x_1'<x_2'<x_3'$。若在 x_1'，x_2'，x_3' 处的函数值分别是 y_1'，y_2'，y_3'，则我们又得到一条新的抛物线，并去求其极大点。如此下去，直到函数的极大点（或它的充分邻近的一个点）被找到为止。这个方法称为**抛物线法**，其收敛速度常比黄金分割法更快（参阅〔4〕）。

在实际使用时，可以先用黄金分割法，然后用它得到的最后三个试验点 x_1，x_2，x_3 及其对应的 y_1、y_2、y_3，用抛物线法找出 x_4 及其对应的 y_4。比较 y_4 与 y_1、y_2、y_3 中的最大值，然后决定是否还要在 x_4 处再做一次试验？

参 考 文 献

[1] 华罗庚，优选法平话，科学出版社，北京，1971。

[2] 华罗庚，优选法平话及其补充，国防工业出版社，北京，1973。

[3] 华罗庚，优选法话本，辽宁人民出版社，辽宁，1973。

[4] 华罗庚，优选学，科学出版社，北京，1981。

[5] 华罗庚，陈德泉，计雷等(编辑)，统筹方法资料，中国科学技术大学出版，1965。

[6] Kiefer J. "Sequential Minimax Search for a Maximum" Proc. Amer. Math. Soc, 4, 1953, pp. 502—506.

[7] Wilde D.J. Optimum Seeking Methods. Prentice–Hall, N.J., 1964.

[8] 吴方，"Extremum of a Special Function" Scientia Sinica, 1,1974, pp 1–14.

英文版校订者注：这一领域的一些补充参考文献如下。

[9] Avriel M. Nonlinear Programming: Analysis and methods. Prentice–Hall, 1976.

[10] Bazarra M. S. and C. M. Shetty. Nonlinear Programming. John Wiley &Sons, 1979.

[11] Beightle C.S., D.T.Phillips and D.J. Wilde. Foundations of Optimization. 2nd ed., Prentice–Hall, 1979.

[12] Kowalik J. and M.R. Osborne." Methods for Unconstrained Optimization Problems" in Modern Analytic and Computational Methods, ed. R.Bellman. Am. Elsevier Publ. Comp., N.Y. 1968.

[13] Press W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling. Numerical Recipes. Cambridge University Press, 1986.

[14] Scales L. E. Introduction to Non–Linear Optimization. Springer, 1985.

第四章　优选法（多因素）

§4.1　引言

为简单计，我们仅限于讨论双因素的情况。绝大多数双因素优选法都易于推广到多因素的情形，但当因素个数增加时，所需试验次数增长得很快。所以，我们应该尽可能避免使用多因素优选法，尽管影响着每一工业生产过程的因素往往是很多的。我们应当抓住一个或两个主要因素，运用优选法，就这一、二个因素求出最佳的生产工艺,再用同样的方法对另外一、二个因素做试验，以继续改进生产工艺,如此等等，直到得到满意的结果为止。这样做比直接运用多因素优选法似更稳妥可靠。我们回过头去参阅§3.1中曾经提过的一些实际问题。

§ 4.2 单峰函数（多因素）

我们假定 $f(x, y)$ 是定义在区域

$$a < x < b, \quad c < y < d \tag{4.1}$$

上的单峰函数，即 $f(x, y)$ 在（4.1）式的定义域中连续，且仅有一个极大点（或极小点），由任何等高线 $f(x, y) = c$ 围成的区域都是凸的。$z = f(x, y)$ 的等高线图如图 4.1 所示。

最简单的双因素优选法是等分法。将定义域（4.1）中的 x 与 y 值域各分为 $l+1$ 与 $m+1$ 等分。在以下诸点

$$\left(a + \frac{(b-a)\ i}{l+1},\ c + \frac{(d-c)\ j}{m+1}\right),\ (1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

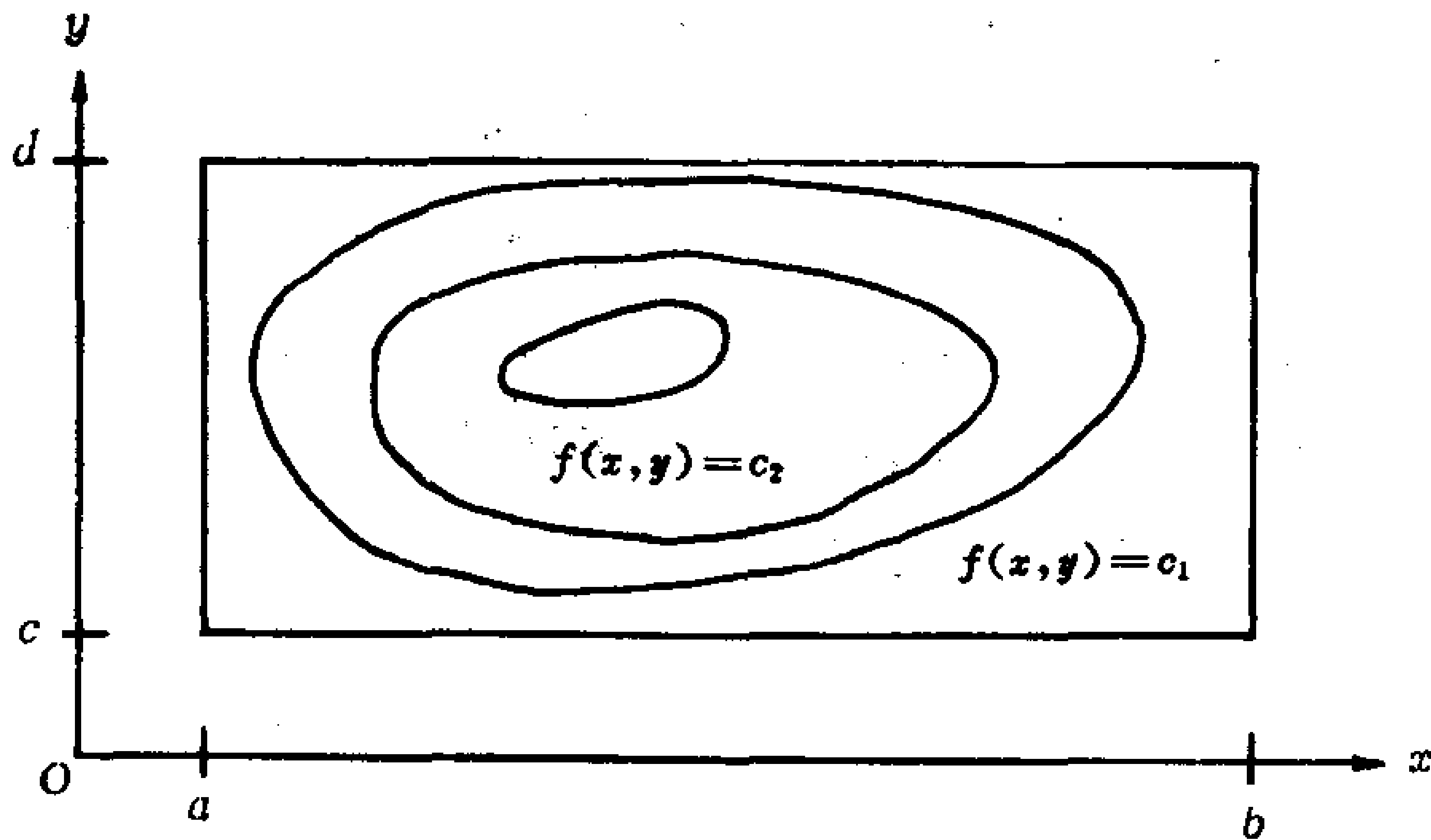


图 4.1

上安排试验，并比较这些试验结果。具有最佳试验结果的点被视为 z 的极大点的近似位置。

但是，对一个工厂来说，这一方法所需的试验次数太多了。确切地说，若我们需要得到一个含有 f 极大点的边长 $\leqslant \varepsilon$ 的正方形，则所需的试验次数的数量级为 $\frac{1}{\varepsilon^2}$。

我们将在下面各节中，将黄金分割法与分数法推广到双因素的情况。

§ 4.3 对开法

1）在（4.1）式的垂直平分线段

$$x=\frac{a+b}{2},\quad c<y<d \tag{4.2}$$

上，用黄金分割法找出函数 z 的极大点（或其一个邻近点）P. 再在 (4.1) 式的水平平分线段

$$a<x<b,\quad y=\frac{c+d}{2} \tag{4.3}$$

上，用黄金分割法找出 z 的极大点 Q。不失一般性，我们可以假定 P、Q 的位置如图 4.2 所示。

2）比较 P 与 Q 两点的试验结果。如果 Q 给出较好的结果，则去掉区域（4.1）式在（4.2）式线段左边的部分，留下右边部分，如图 4.3 所示。否则，去掉区域（4.1）式在（4.3）式线段下面的部分，留下其上面的部分，如图 4.4 所示。

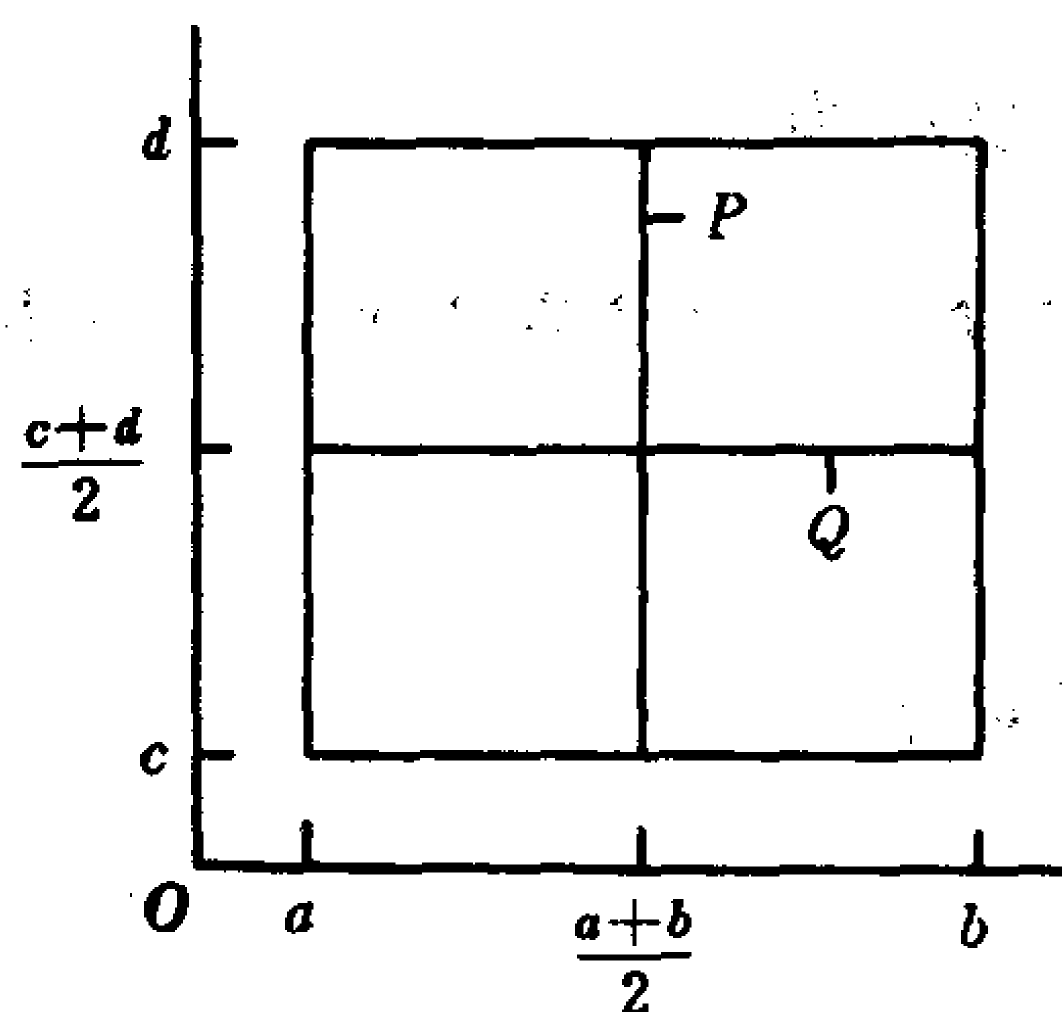


图 4.2

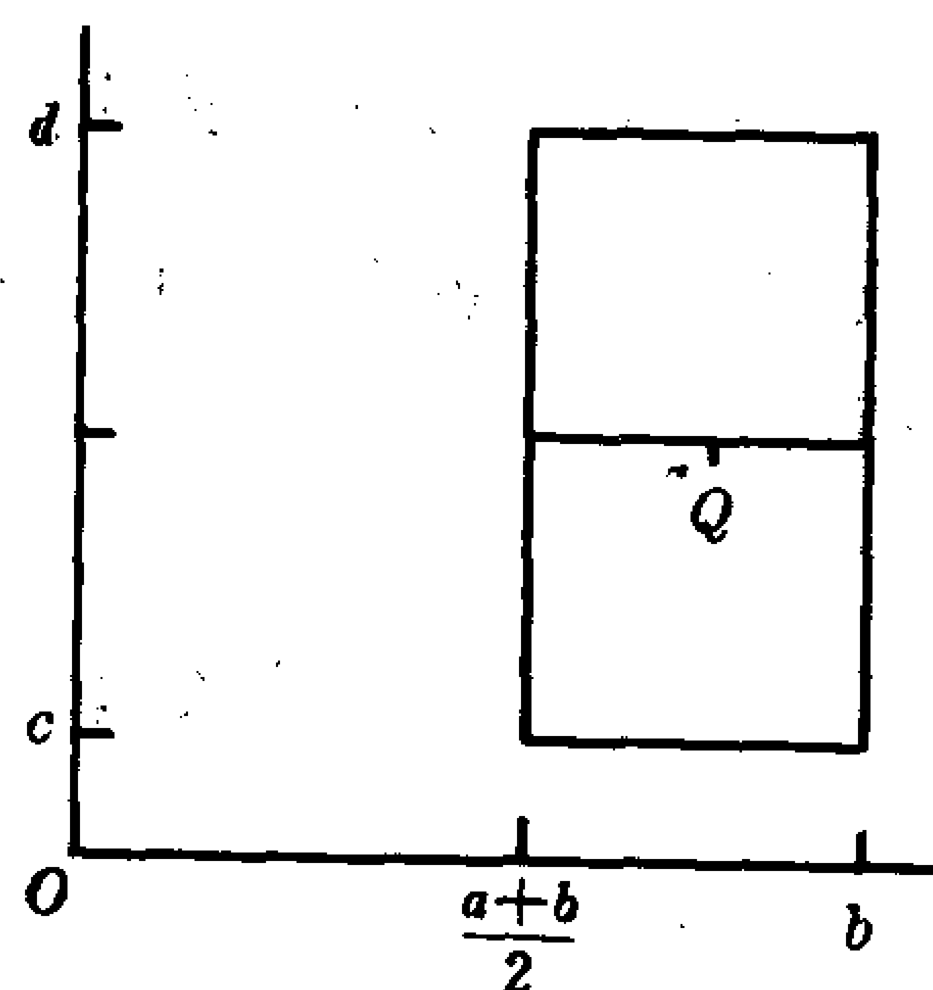


图 4.3

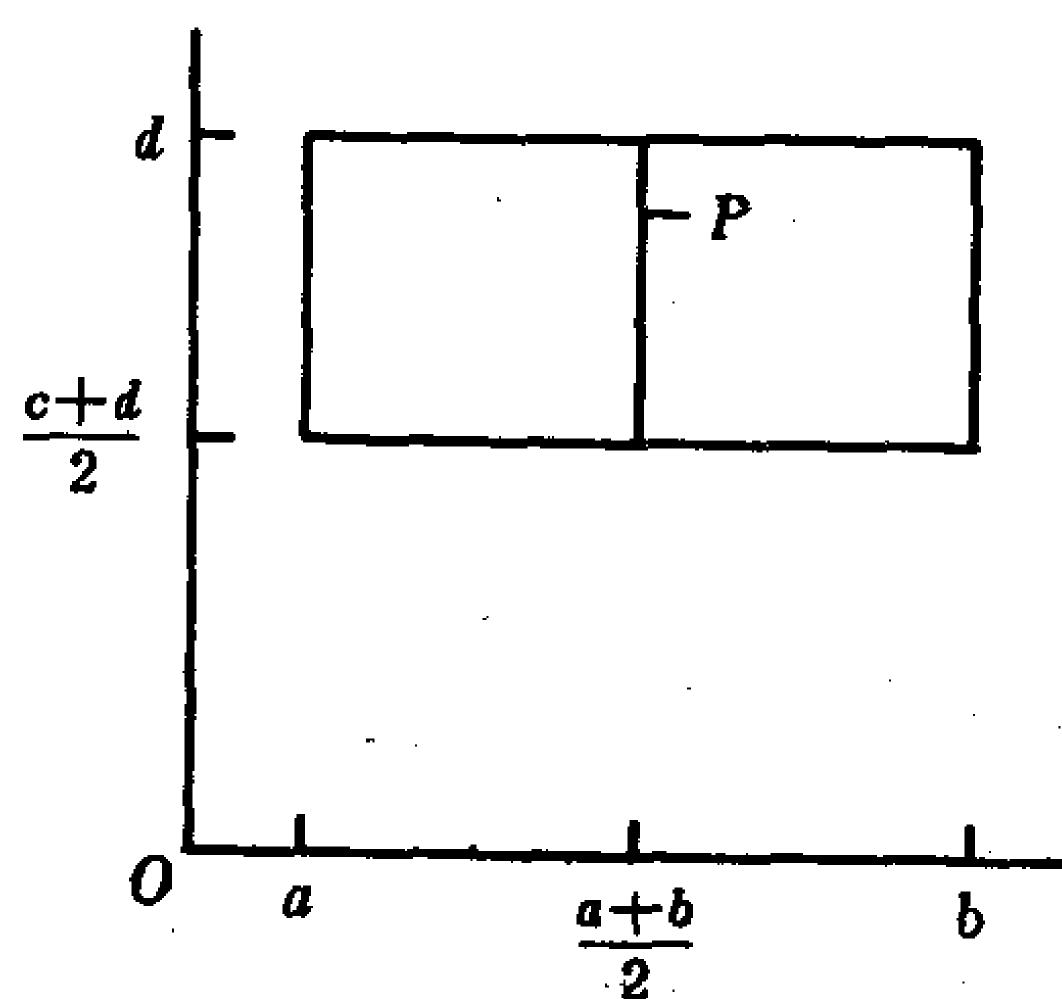


图 4.4

3) 不失一般性，可以假定留下的区域是

$$\frac{a+b}{2}<x<b,\quad c<y<d。\tag{4.4}$$

用 (4.4) 式代替 (4.1) 式，重复步骤 1) 与 2)。由于 (4.4) 式中已

包有一个试验点 Q，只要在线段

$$x=\frac{1}{2}\ (\frac{a+b}{2}+b)=\frac{a+3b}{4},\quad c<y<d$$

上，用黄金分割法求出 z 的极大点 R。再比较 Q 与 R 的试验结果，如此等等，直到求得一个满意点为止。

我们经常假定曲线 $z=f(x,\ y)$ 有连续切线。对开法是根据下述事实：由于曲线 $f(x,\ y)=c$ 围成的区域是凸的，所以，满足 $f(x,\ y)>c$ 的点，恒位于曲线 $f(x,\ y)=c$ 的任一条切线的一侧。由此可见，若 S 为 z 在线段 l 上的极大点，则 l 为曲线 $f(x,\ y)=c$ 在 S 处的切线。

我们用 $N(\varepsilon)$ 表示用对开法求得的一个包有 z 的极大点的面积 $\leqslant\varepsilon^2$ 的正方区域所需的试验次数。

如果在线段 (4.3) 式上，用黄金分割法做 $3k$ 次试验，我们得到一个包有 z 在 (4.3) 式上的极大点的小区间，其长度为

$$(b-a)\omega^{k-1},\quad \omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

现在要求k满足

$$(b-a)\omega^{k-2}>\varepsilon\geqslant(b-a)\omega^{k-1},$$

或 $$(\frac{1}{\omega})^{k-1}\geqslant\frac{b-a}{\varepsilon}>(\frac{1}{\omega})^{k-2}.$$

因此，k 满足 $k-1\geqslant\dfrac{\ln\dfrac{b-a}{\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{\omega}}>k-2$，这样，$k$ 渐近地等

于$\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\omega}}$. 经过 k 次试验之后，剩下的作实验的区域的面积，只等于原来区域的一半,因此，在 n 个间隔上作完试验后，留下的区域的面积为

$$\frac{(b-a)(d-c)}{2^n}.$$

命n为满足 $\dfrac{(b-a)(d-c)}{2^n} \leqslant \varepsilon^2 < \dfrac{(b-a)(d-c)}{2^{n-1}}$ 的整数。则 n 渐近地等于$\dfrac{2\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$，从而 $N(\varepsilon)$ 渐近地等于 $\dfrac{2(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2}{\ln 2\ \ln\frac{1}{\omega}}$，其数量级为 $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2$。这一方法比等分法得出的$\frac{1}{\varepsilon^2}$优越多了。

附记：若 P、Q 两点的试验结果相同，或无法辨识好坏，这说明 P、Q 位于同一条等高线上，如图 4.5 所示，所以，可以把 (4.1) 式的左半块及下半块都去掉，即图 4.5 中有阴影的部分。因此，留下区域的面积为

$$\frac{a+b}{2} < x < b,\quad \frac{c+d}{2} < y < d,$$

为原来区域面积的四分之一。

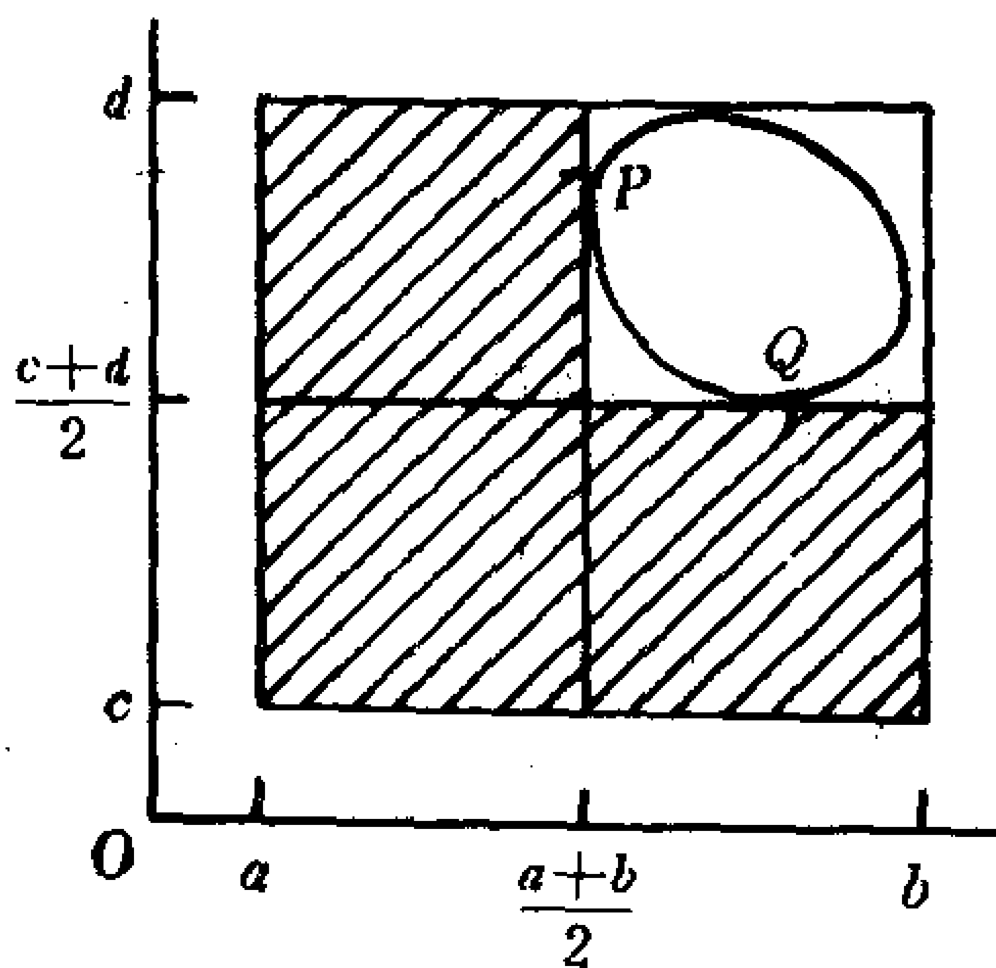


图 4.5

§ 4.4 旋升法

1）首先在线段（4.2）式上，用黄金分割法找出函数 z 的极大点（或其一个邻近点）P_1，再在通过 P_1 的水平线段上，用黄金分割法找出 z 的极大点 P_2。若 P_2 在 P_1 的右边，则去掉（4.2）式左边的区域，即图 4.6 中有阴影的部分。否则，去掉（4.2）式右边的区域。

2）在通过 P_2 的垂直线段上，用黄金分割法求出 z 的极大点 P_3。若 P_3 位于 P_2 的下面，则去掉过 P_2 的水平线段上面的部分（见图 4.7）。否则，去掉下面的部分。继续这一过程，直到得到一个满意点为止。

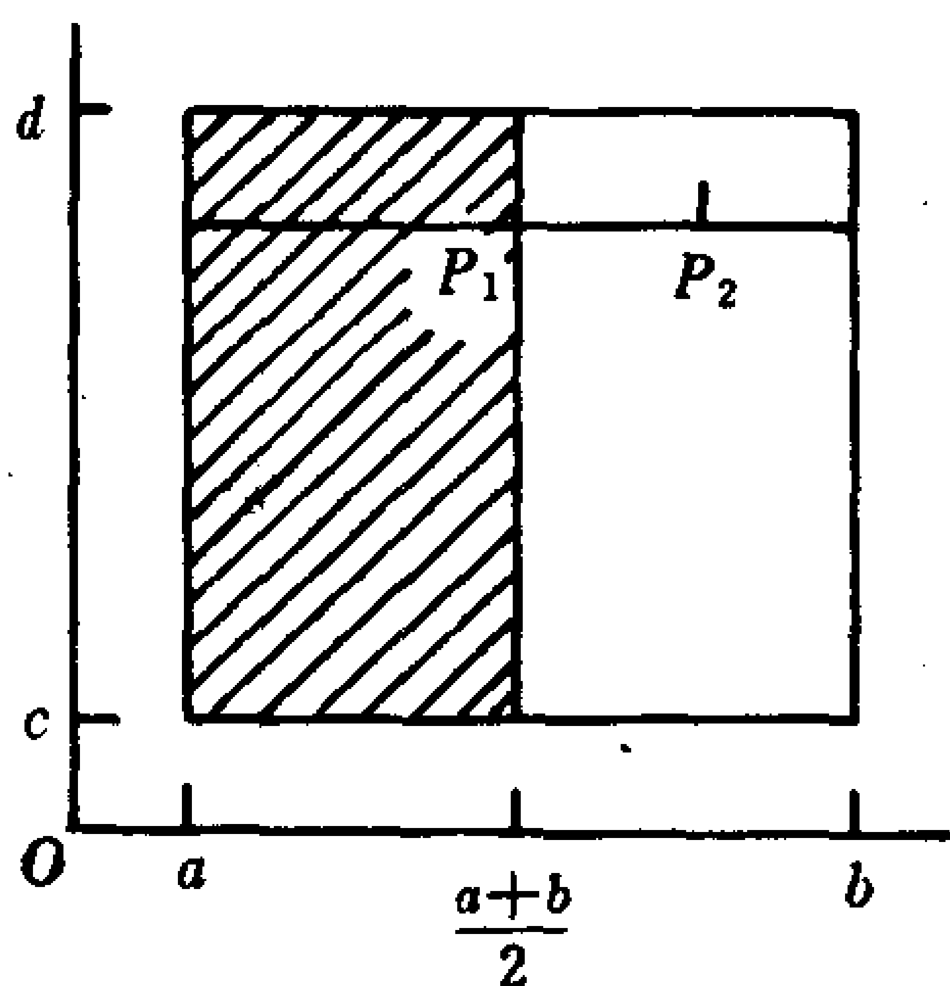


图 4.6

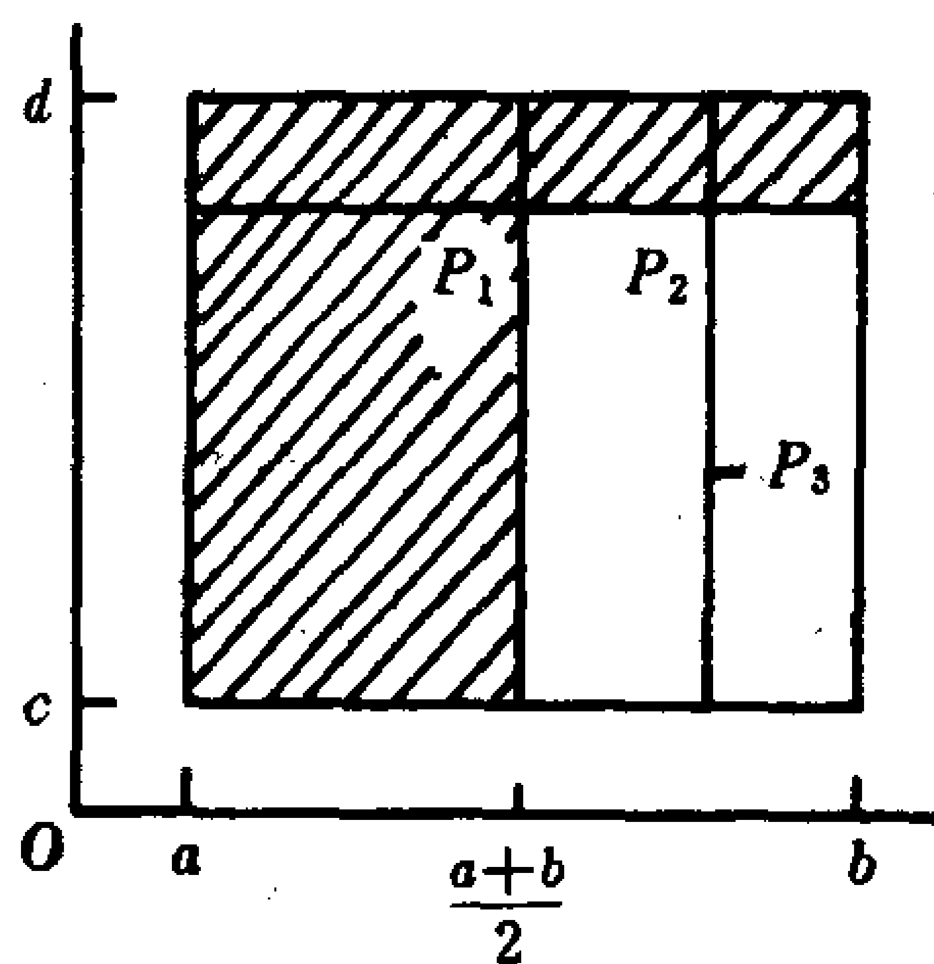


图 4.7

这个方法的收敛速度可以推导如下。命

$$f(P_i)=z_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,$$

则

$$z_1<z_2<\cdots \tag{4.5}$$

是一个单调递增序列。由于 z_i 均不超过函数 z 的极大值，所以序列（4.5）式是收敛的、假定

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0。$$

若 z_0 不是 z 的极大值，则当 n 充分大时，P_n 处的等高线 l_n 的法线穿过 l_0 之内，此地 l_0 是高程为 z_0 的等高线。也就是说，z_{n+1} 比 z_0 更大，这是矛盾的。所以，z_0 是函数 z 的极大值。

用旋升法时，留下区域的面积与原来区域的面积之比，既可以 $\geqslant\frac{1}{2}$，也可以 $<\frac{1}{2}$。故旋升法不像对分法，对分法留下区域的面积，总是等于原来区域面积的一半。

可以证明[1]，用旋升法去得到一个包有 z 的极大点的面积 $\leqslant\varepsilon^2$ 的矩形时，所需试验次数的数量级仍为 $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2$。

§4.5 平行线法

假若一个实验对某一个因素 x 比对另一个因素 y 要易于调整，则用"**平行线法**"更为方便。

用黄金分割法分别找出线段

$$a<x<b,\ y=c+0.618(d-c) \tag{4.6}$$

与

$$a<x<b,\ y=c+0.382(d-c) \tag{4.7}$$

上，函数 z 的极大点 P 与 Q。比较 P 与 Q 处的试验结果，若 P 点的试验结果好些，则去掉线段 (4.7) 式下面的区域，即

$$a<x<b,\ c<y<c+0.382(d-c), \tag{4.8}$$

否则，去掉 (4.6) 式上面的区域，即

$$a<x<b,\ c+0.618(d-c)<y<d$$

（见图 4.8）。在留下的区域中继续上面的过程，等等，直到得到一个满意点为止。

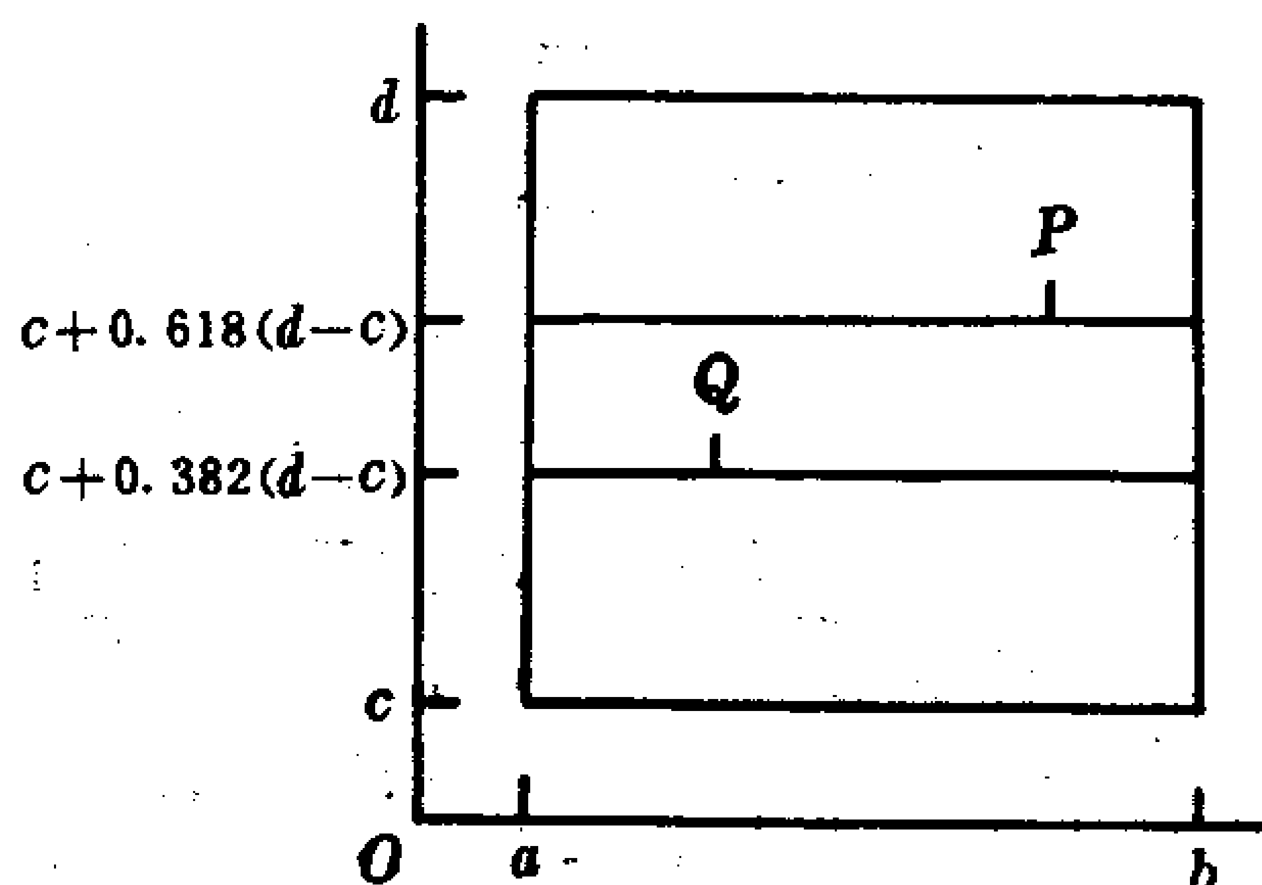


图 4.8

§4.3 已经证明，在一线段上，用黄金分割法求得含有 z 的极大点的长度 $\leqslant \varepsilon$ 的子区间所需的试验次数的数量级为

$$\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\omega}}, \quad \omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

留下区域的面积总是原来区域面积的 ω 倍，所以，在 n 条平行线段上做完 n 批实验之后，留下区域的面积为 (4.1) 式面积的 ω^{n-1} 倍，即等于

$$(b-a)(d-c)\omega^{n-1}$$

若要它接近于 ε^2，则 n 渐近地为 $\frac{2\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\omega}}$，因此，所需试验的总数的数量级为 $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2$。

§ 4.6 双因素的离散情况

举个例子来说明方法。假如函数 $z=f(x, y)$ 是定义在 20 × 12 个格子点上的，如图 4.9 所示。

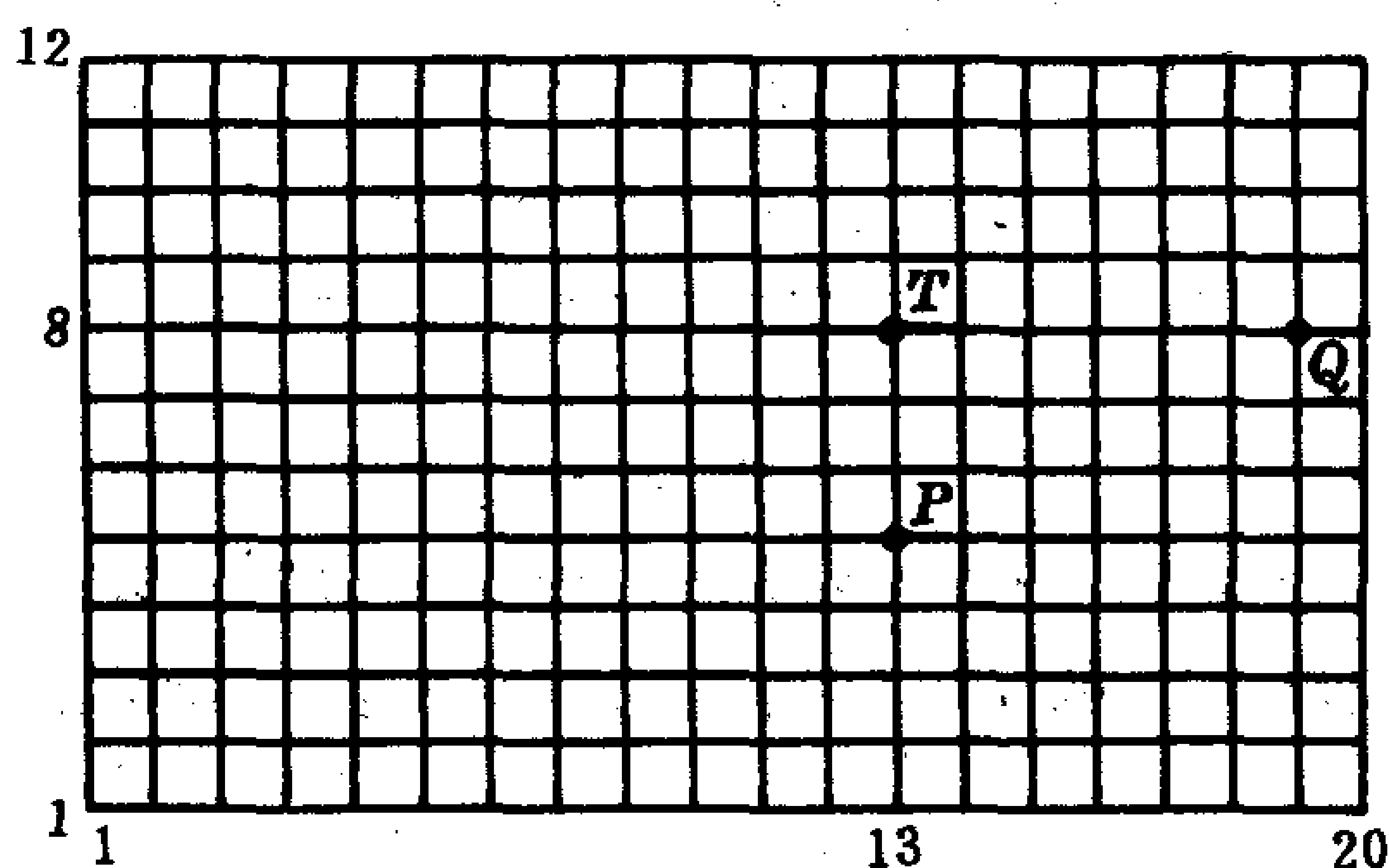


图 4.9

1) 首先在格子点

$$(13, j), \quad j=1, 2, \cdots, 12$$

上，用分数法做 5 次试验，找出 z 的极大点 P。再在格子点

$$(i, 8), \quad i=1, 2, \cdots, 20$$

上，找出极大点 Q。在此，由于 $T=(13, 8)$ 的试验结果已知，所以，做 5 次试验足以找到后面这组点中的最大点 Q。比较 P 与 Q 处的试验结果，若 Q 的结果好，则去掉通过 P 的垂线的左边区域，否则，就去掉通过 Q 的水平线的上面区域。不失一般性，假定 Q 处的结果好些，则留下的区域如图 4.10 所示。

2) 在图 4.10 中，我们可以在直线 $x=13+5=18$ 上，也可以在直线 $x=21-5=16$ 上继续使用分数法。因为直线 $x=18$ 更靠近 Q，所以我们在格点 $(18, j)$，$j=1, 2, \cdots, 18$ 上，用分数法求得 z 的极大点 R。再比较 Q 与 R 处的试验结果，如此等等。继续这个过程，经过 30 次试验，可以求得 z 的极大点。

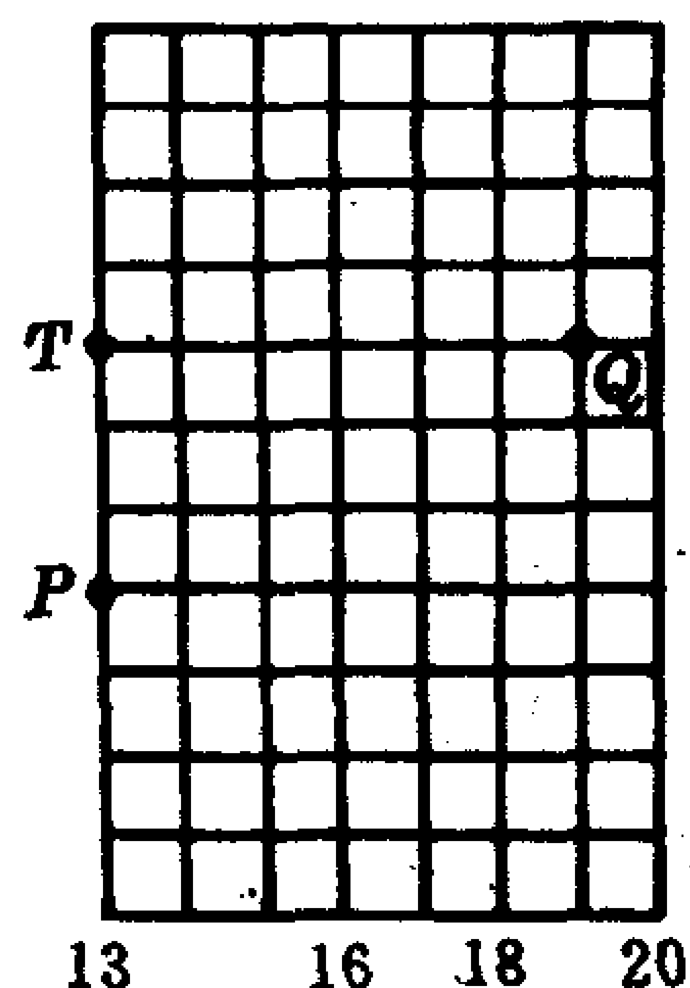


图 4.10

一般说来，我们可以处理在 $(F_n-1)\times(F_m-1)$ 个格子点上的问题。若水平方向的格子点数 N 并不正好等于 F_n-1 时，例如，$F_{n-1}-1<N<F_n-1$，则可以在区域的右边添加 $(F_n-N-1)\times(F_m-1)$ 个虚拟的格子点，在这些格子点上定义 z 的值为

$$f(k, j)=f(N, j),\ k=N+1, \cdots, F_n-1,$$

$$j=1, 2, \cdots, F_m-1.$$

对于垂直方向的格子点数不等于 F_m-1 时，也可以类似地加以处理。

附记：在示教上述各方法时，如同说明黄金分割法那样，建议准备一张带有刻度的纸张。每比较两个试验结果后，即撕去一块纸。由于 z 的极大点总在留下的纸张所示的位置上，所以，当留下的纸张足够小时，即可得到一个满意的点。

§ 4.7 翻筋斗法

在试验区域中，从任意一个等边三角形△ABC出发，先在三个顶点A、B、C处各做一个实验。如果说C点的结果最好，则将AC与BC边分别延长至AD与BE，使△CDE与△ABC为两个全等的三角形。在D与E各做一次试验，如果说D的结果在C、D、E三点中是最好，则再考虑等边三角形DFG。若F与G处的试验结果中有一个比d的试验结果好，则还可以继续做下去。反之，若F与G处的试验结果都没有D的试验结果好，则取DF与DG的中点F'与G'，或取CD与DE的中点C'与E'。对等边三角形△$DF'G'$或△$DC'E'$，继续上面的过程，直到得出一点O，用上述方法已不能找到比O有更好的试验结果的点为止（或直到已无法分辨O与其周围的点的试验结果时为止），则O即为z的极大点（见图4.11）。

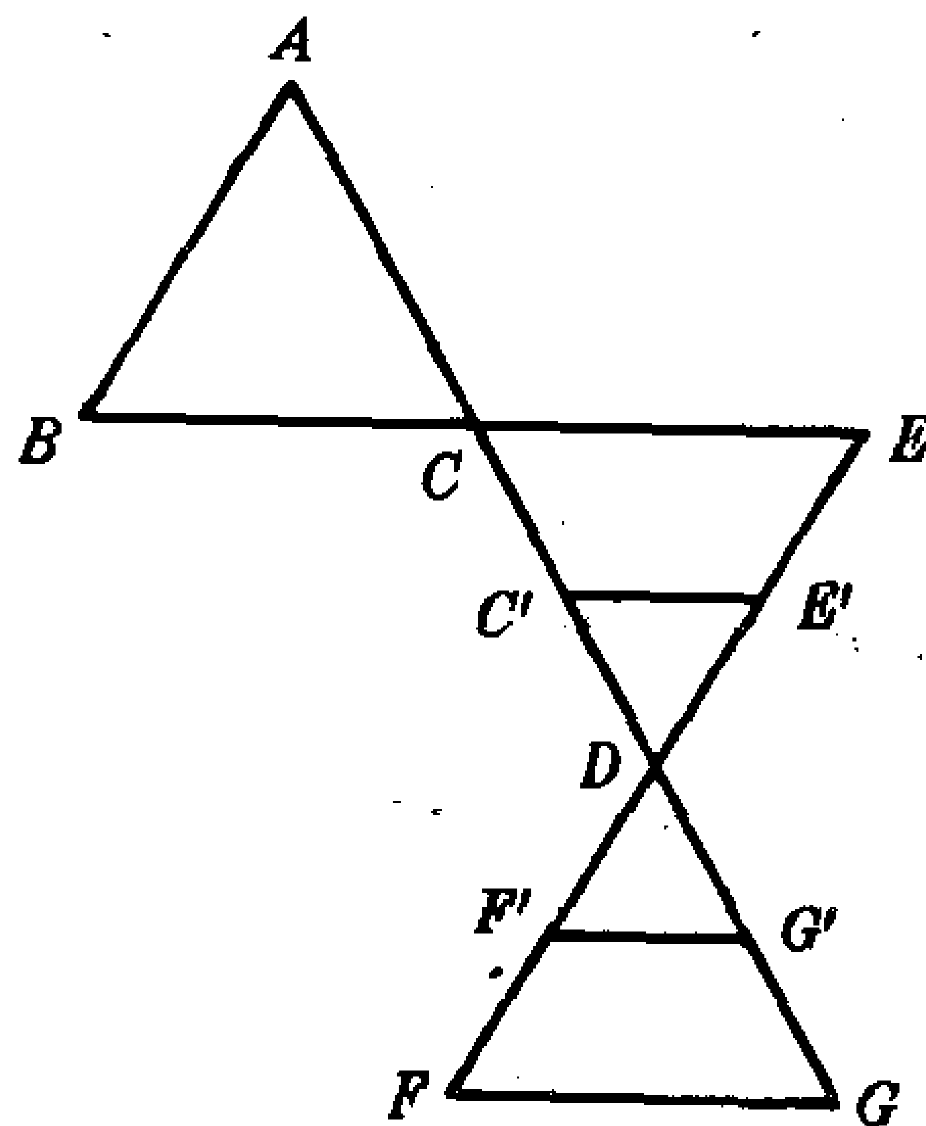


图 4.11

翻筋斗法的理论根据是：若通过一点 P 的两个方向的微商都等于零，则一般说来，P 就是 z 的极大点。

这个方法中关于等边三角形的限制显然是不必要的。它可以换为任何给定形状的三角形，或者，更为一般的，可以换成任意多边形。最简单的办法是将三角形换成矩形，这样的翻筋斗法又称为矩形法。但是由于平面极值问题，只要考虑两个方向就够了，因此，在翻筋斗法中，用矩形就不如三角形为好。

如果初始的等边三角形的顶点可能选取如下：假定 A 的坐标是 (a_1, a_2)，则边长为 h 的等边三角形 $\triangle ABC$ 的另两个顶点 B 与 C 的座标可以取为

$$\left(a_1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}h,\ a_2+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}h\right) \text{ 与 }$$

$$\left(a_1+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}h,\ a_2+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}h\right)$$

翻筋斗法很容易推广至 n 个因素的情况。从一个边长为 h 的 n 维正单纯形出发，先在单纯形的 $n+1$ 个顶点做 $n+1$ 次试验，保留有最好试验结果的顶点。再以这个点为一个顶点，做一个新的边长为 h 的正单纯形，继续上面的过程，直到新单纯形各顶点的试验结果都不如原来顶点的结果为止。再将单纯形的边长缩短成 $\frac{h}{2}$，重复上面的过程，如此等等，直到找到一个满意点为止。这个方法有时也叫**单纯形法**。

如果初始的正单纯形的顶点可能选取如下：假定 A 点的座标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。则以 A 为一个顶点，边长为 h 的正单纯形的其它几个顶点的座标可以取为

$$\left(a_1+ah,\ \cdots,\ a_{i-1}+ah,\ a_i+\ \left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)h,\right.$$

$a_{i+1}+ah,\ \cdots,\ a_n+ah)$, $1\leqslant i\leqslant n$,

此处 $a=\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{2}}$.

§4.8 最陡上升法

命 $(x_1,x_2,\cdots,x_s),(x_1+\delta_1,x_2,\cdots,x_s),\cdots,(x_1,\ x_2,\cdots,x_s+\delta_s)$ 为试验区域中的 $S+1$ 个点。命 $z^{(0)},\ z^{(1)},\ \cdots,\ z^{(s)}$ 分别为这些点处对应的试验结果。用单因素优选法在点的形式为

$$x_1+\frac{z^{(1)}-z^{(0)}}{\delta_1}t,\ \cdots,\ x_s+\frac{z^{(s)}-z^{(0)}}{\delta_s}t$$

的线段上，找出极大点。此处t满足

1) $t\geqslant 0$与

2) $a_i<x_i+\dfrac{z^{(i)}-z^{(0)}}{\delta_i}t<b_i,\ 1\leqslant i\leqslant s.$

(试验区域为 $\{u:\ a_i<u_i<b_i,\ 1\leqslant i\leqslant s\}$).

若在 $t=t_0$ 时，z 达到极大，则以 $(y_1,\ \cdots,\ y_s)$ 代替 $(x_1,\ \cdots,\ x_s)$ ，重复上面的过程，此处

$$y_i=x_i+\frac{z^{(i)}-z^{(0)}}{\delta_i}t_0,\ 1\leqslant i\leqslant s.$$

这一迭代过程一直做到 $(x_1,\ \cdots,\ x_s)$ 与 $(y_1,\ \cdots,\ y_s)$ 的距离小于预先给定的一个正数为止。

若 z 假定为足够光滑，则我们可以证明[1]：若我们需要找到一个体积 $\leqslant\varepsilon$，且包含 z 的极大点的区域，所需的试验次数的数量级为 $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2$。

虽然最陡上升法与旋升法在形式上不同，但它们在实质上

是一致的。旋升法是先在一线段 l 上，找出 z 的极大点 P。线段 l 是等高线 $z=c$ 在 P 点的切线，因此，这两个方法在实质上是相同的。

§ 4.9 抛物体法

单因素的抛物线法可以简述于下：利用三点 x_1、x_2、与 x_3 得到的试验结果 y_1、y_2 与 y_3 作一条抛物线，它通过点 (x_1, y_1)、$(x_2、y_2)$ 与 $(x_3、y_3)$。然后取抛物线的极大点作为一个新试验点，等等。把这一想法推广到多因素，便得出**抛物体法**。

给出 $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 个点 $P_i(x_1^{(i)}, \cdots, x_s^{(i)})$，

$1 \leqslant i \leqslant \frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 及这些点上对应的试验结果 z_i，确定一个通过 $(x_1^{(i)}, \cdots, x_s^{(i)}, z_i)$，

$$1 \leqslant i \leqslant \frac{(s+1)(s+2)}{2} \text{ 的抛物面}$$

$$z = F(x_1, \cdots, x_S) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{s} a_k x_k + a. \tag{4.9}$$

其次，找出 (4.9) 式的极大点 $(x_1^*, \cdots, x_s^*, z^*)$。最后，得到一个通过 $(x_1^{(i)}, \cdots, x_s^{(i)}, z_i)$，$2 \leqslant i \leqslant \frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 及 $P^*(x_1^*, \cdots, x_s^*, z^*)$ 的新抛物面，此处，z^* 是在 $(x_1^*,$

$\cdots$，x_s^*）处的试验结果。这一迭代过程一直进行下去，直到求得一个满意点为止。

在适当条件之下，我们可以求得对这一方法的收敛速度的估计[1]。详言之，如果我们要得到一个包含有函数极大点且体积 $\leqslant \varepsilon$ 的区域，所需试验次数的数量级为 $s^2 \ln(\ln\frac{1}{\varepsilon})$。

假定有了函数 z 的表达式 $z=\varphi(x_1, \cdots, x_S)$。则我们可以得出一个很容易改写为计算机程序的求 z 的极大点的迭代算法。

$$\text{令}\quad \vec{x}^{(0)},\ \vec{x}^{(0)}+\eta\vec{e}_i\ (1\leqslant i\leqslant s),$$
$$\vec{x}^{(0)}+\eta(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\quad (1\leqslant i\leqslant j\leqslant s) \tag{4.10}$$

是 $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 个给定的点，此处 $\vec{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_S^{(0)})$，$\vec{e}_i$ 是第 i 个单位矢量。找出一个二次函数

$$\Psi(\vec{x})=\alpha+2\vec{b}\vec{x}^T-\vec{x}C\vec{x}^T,$$

使对于 (4.10) 中诸点有

$$\Psi(\vec{x})=\varphi(\vec{x}), \tag{4.11}$$

此处，$\vec{b}=(b_1, \cdots, b_s)$ 及 $C=(c_{ij})(c_{ij}=c_{ji})$ 是一个 $s\times s$ 正定方阵。将 (4.10) 式代入 (4.11) 式，得 $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 个方程，由此可以唯一确定 $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ 个变数 α，$\vec{b}$ 与 C。命

$$\Delta_i f(\vec{x})=\frac{1}{\eta}(f(\vec{x}+\eta\vec{e}_i)-f(\vec{x}))。$$

则 $\Delta_i\varphi(\vec{x}^{(0)})=\Delta_i\Psi(\vec{x}^{(0)})$

$$=\frac{1}{\eta}(2\vec{b}(\vec{x}^{(0)}+\eta\vec{e}_i)^T-2\vec{b}\vec{x}^{(0)T}-(\vec{x}^{(0)}+\eta e_i)C(\vec{x}^{(0)}$$

$$+\eta\vec{e}_i)^T-\vec{x}^{(0)}C\vec{x}^{(0)T})$$

$$=2\vec{b}\vec{e}_i^T-2\vec{x}^{(0)}C\vec{e}_i^T-\eta\vec{e}_iC\vec{e}_i^T$$

及 $\Delta_i\Delta_j\varphi(\vec{x}^{(0)})=-2\vec{e}_iC\vec{e}_j^T$。

即得 $C=-\frac{1}{2}(\Delta_i\Delta_j\varphi(\vec{x}^{(0)}))$，$1\leqslant i$，$j\leqslant s$

及 $(\Delta_1\varphi(\vec{x}^{(0)})$，…，$\Delta_s\varphi(\vec{x}^{(0)}))=2\vec{b}-2\vec{x}^{(0)}C$

$$+\frac{\eta}{2})\Delta_1^2\varphi(\vec{x}^{(0)}),\ \cdots,\ \Delta_S^2\varphi(\vec{x}^{(0)}))。\tag{4.12}$$

由于C是正定的及

$$\Psi(\vec{x})=\alpha+\vec{b}C^{-1}\vec{b}^T-(\vec{x}-\vec{b}C^{-1})C(\vec{x}-\vec{b}C^{-1})^T,$$

所以，当 $\vec{x}=\vec{x}^{(1)}=\vec{b}C^{-1}$

时，$\Psi(\vec{x})$ 取极大值。由 (4.12) 可知

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}-V(\vec{x}^{(0)})M(\vec{x}^{(0)})^{-1},$$

此处 $V(\vec{x}^{(0)})=(\Delta_1\varphi(\vec{x}^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_1^2\varphi(\vec{x}^{(0)}),\cdots,$

$$\Delta_s\varphi(\vec{x}^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_S^2\varphi(\vec{x}^{(0)}))$$

及 $M(\vec{x}^{(0)})=(\Delta_i\Delta_j\varphi(\vec{x}^{(0)}))$，$1\leqslant i$，$j\leqslant s$。

因此，我们建议用迭代公式

$$\vec{x}^{(r+1)}=\vec{x}^{(r)}-V(\vec{x}^{(r)})M(\vec{x}^{(r)})^{-1},$$

$$r=0,\ 1,\ \cdots$$

来逐步逼近$\varphi(\vec{x})$的极大点，此处

$$V(\vec{x}^{(r)})=(\Delta_1\varphi(\vec{x}^{(r)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_1^2\varphi(\vec{x}^{(r)}),\cdots,$$

$$\Delta_S\varphi(\vec{x}^{(r)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_S^2\varphi(\vec{x}^{(r)}))$$

及 $M(\vec{x}^{(r)})=(\Delta_i\Delta_j\varphi(\vec{x}^{(r)}))$，$1\leqslant i,\ j\leqslant s$。

假定当$\vec{x}=\vec{x}^*$时，$\varphi(\vec{x})$ 取极大值。则

$$\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}^*}=0,\ 1\leqslant i\leqslant s。$$

命 $\|\vec{x}\|$ 表示$\vec{x}$的各分量的绝对值之和，则当 $\varphi(\vec{x})$ 满足某些条件时，我们可以证明[1]

$$\|\vec{x}^{(r+1)}-\vec{x}^*\|=O(\|\vec{x}^{(r)}-\vec{x}^*\|^2)\ 。$$

附记 1) 在 DFP(Davidon,Fletcher and Powell,1962) 方法中，最初宣称的收敛速度为

$$\|\vec{x}^{(r+1)}-\vec{x}^*\|=o(\|\vec{x}^{(r)}-\vec{x}^*\|)。$$

华罗庚在 60 年代中期就曾证明这一方法的收敛速度还应该达到

$$\|\vec{x}^{(r+s)}-\vec{x}^*\|=O(\|\vec{x}^{(r)}-\vec{x}^*\|^2)。$$

当他 1979 年访问西欧时，才得知 W.Burmeister 曾于 1973 年也证明了这个结果。但是，抛物体法所需的试验次数至多只相当于 DFP 方法的一半。

2) 在翻筋斗法、最陡上升法与抛物体法中，都需要在试验区域中，寻找一个点作为迭代的初始点。因此，寻找一个好的初始试验点是很重要的事。若这一点选得很靠近函数的极大点，则经少数试验即可求得极大点。我们建议下面寻求初始试验点的方法。假定试验区域是一个单位立方体 G_s，

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant s。$$

则取一组点$\vec{x}^{(j)}$，$1\leqslant j\leqslant n$，它们在 G_s 上是一致分布的[2]，

在这 n 个点上安排 n 个试验。比较试验结果 $f(\vec{x}^{(j)})$，$1 \leqslant j \leqslant n$，其中使函数取最大值的点即可以取作迭代的初始点。进而言之，若函数不是单峰的，则这些试验结果将表明函数值的分布情况。

§ 4.10 凸体

s 维空间的凸体 D 的定义如下：若 $\vec{x} \in D$，$\vec{y} \in D$，则 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的连线上的点也属于 D，即

$$\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) \in D, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1。$$

定理 4.1 通过 D 的重心的任意超平面均将 D 分为两部分，其体积之比 M 满足

$$\frac{\left(\frac{s}{s+1}\right)^s}{1 - \left(\frac{s}{s+1}\right)^s} \leqslant M \leqslant \frac{1 - \left(\frac{s}{s+1}\right)^s}{\left(\frac{s}{s+1}\right)^s}.$$

我们仅对于 $s = 2$ 来证明这一定理。因为证明的论点可以推广到 $s > 2$.

D的面积$|D|$为

$$|D| = \iint_D dxdy,$$

D的重心坐标$(\bar{x}, \bar{y})$为

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|}\iint_D xdxdy, \quad \bar{y} = \frac{1}{|D|}\iint_D ydxdy.$$

不失一般性，假设通过 D 的重心的直线取作 x 轴，则得

$$\iint_D y dxdy = 0. \tag{4.13}$$

D 在 x 轴上面的部分记为 D^+，而在其下面的部分记为 D^-。由于 D^+ 与 D^- 可以互相颠倒，定理的结论可以写成

$$\frac{|D^+|}{|D^-|} \geqslant \frac{4}{5}$$

或 $$\left|\iint_{D^+} dxdy\right| \geqslant \frac{4}{5}\left|\iint_{D^-} dxdy\right|, \tag{4.14}$$

而定理的假设(4.13)式，即

$$\iint_{D^+} y dxdy = -\iint_{D^-} y dxdy。$$

也就是说，若 D^+ 与 D^- 对 x 轴有相同的矩时，关系式 (4.14) 成立。

定理4.1的证明:

1)对称化。

假设D由 $c \leqslant y \leqslant d$，$\varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y)$

给出。则

$$\iint_d dxdy = \int_C^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dxdy = \int_C^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$$

$$= \int_C^d \int_{-\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))}^{\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))} dxdy$$

与 $$\iint_D y dxdy = \int_C^d y \int_{-\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))}^{\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))} dxdy$$

命D'表示区域$c \leqslant y \leqslant d$，

$$-\frac{1}{2}(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)).$$

我们继续证明 D' 也是一个凸体。事实上，假定 $(x_1, y_1)\in D'$ 与 $(x_2, y_2)\in D'$，则

$$-\frac{1}{2}(\varphi_2(y_1)-\varphi_1(y_1))\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}(\varphi_2(y_1)-\varphi_1(y_1))$$

$$-\frac{1}{2}(\varphi_2(y_2)-\varphi_1(y_2))\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{2}(\varphi_2(y_2)-\varphi_1(y_2)).$$

记 $x=x_1+t(x_2-x_1)$，$y=y_1+t(y_2-y_1)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，

则 $$-\frac{1}{2}((1-t)(\varphi_2(y_1)-\varphi_1(y_1))+t(\varphi_2(y_2)-\varphi_1(y_2)))\leqslant x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}((1-t)(\varphi_2(y_1)-\varphi_1(y_1))+t(\varphi_2(y_2)-\varphi_1(y_2))).$$

由于D是凸的，即 $(1-t)\varphi_1(y_1)+t\varphi_1(y_2)\geqslant\varphi_1(y)$

与 $(1-t)\varphi_2(y_1)+t\varphi_2(y_2)\leqslant\varphi_2(y)$，

推定了 $(x, y)\in D'$。这就是说 D' 可以用来代替 D。因此，不失一般性，我们可以假设 D 是对于 y 轴对称的凸域。

2) 拉直。

若 x 轴交 D 的边界于 P、Q 两点。显然可以在 y 轴上找到一点 R，使 D^+ 与三角形 $\triangle PQR$ 对 x 轴的矩相同，即

$$\iint\limits_{D^+} ydxdy=\iint\limits_{\Delta PQR} ydxdy.$$

我们着手证明 $|D^+|=\iint\limits_{D^+} dxdy\geqslant\iint\limits_{\Delta PQR} dxdy.$

事实上，若三角形 $\triangle PQR$ 与 D^+ 的交点为 (x_0, y_0) 与 $(-x_0, y_0)$（见图 4.12)，如果 $(x, y)\in\triangle PQR-D^+$，则 $y>y_0$；如果 $(x, y)\in D^+-\triangle PQR$，则 $y<y_0$. 说明如下。

把 RP 与 RQ 分别延长到 RP' 与 RQ'，使 $P'Q'$ 平行于 x

轴，并使 D^- 与 $PQQ'P'$ 对 x 轴有相同的矩，即

$$\iint_{D^-} y dx dy = \iint_{PQP'Q'} y dx dy.$$

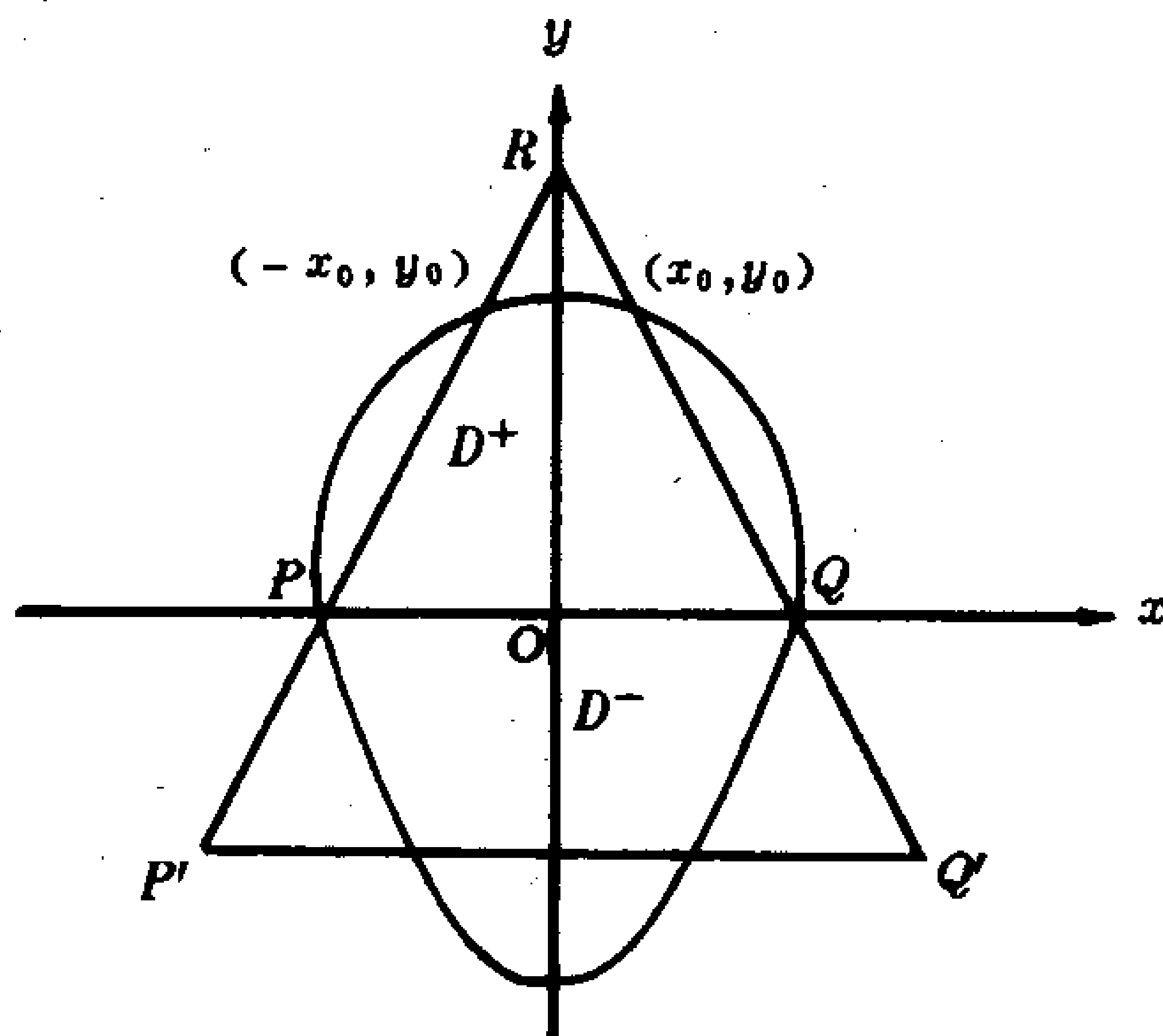


图 4.12

于是 $|D^-| = \iint_{D^-} dx dy \leqslant \iint_{PQP'Q'} dx dy = |PQP'Q'|$.

因此

$$\frac{|D^+|}{|D^-|} \geqslant \frac{|\triangle PQR|}{|PQP'Q'|}. \tag{4.15}$$

由于

$$\iint_{\triangle PQR} y dx dy = -\iint_{PQP'Q'} y dx dy,$$

所以，$\triangle P'Q'R$的重心仍在原点。

3) 由于 $|RO|$ 等于 $\triangle P'Q'R$ 中对应于边 $P'Q'$ 的高的$\frac{2}{3}$，所以

$$|\triangle PQR| = \frac{4}{9}|\triangle P'Q'R|,$$

因此
$$\frac{|\triangle PQR|}{|PQP'Q'|} = \frac{4}{5}。 \tag{4.16}$$

由(4.15)式及(4.16)式即得定理。 □

§ 4.11 切块法

本节我们将介绍在 s 维空间区域 R_0 中，找出函数 $z=f(x_1, \cdots, x_S)$的极大点的一种算法。取R_0中的一点 $P_1^{(0)}$ $(x_1^{(0)}, \cdots, x_S^{(0)})$，并取$s$个邻近点$P_0^{(i)}(x_1^{(0)}, \cdots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}+\delta_i, x_{i+1}^{(0)}, \cdots, x_s^{(0)})$，$1 \leqslant i \leqslant s$，这里，对每一个 i，诸 δ_i 充分小，使 $P_0^{(i)}$ 均属于 R_0. 先在 $P_0^{(i)}(0 \leqslant i \leqslant s)$ 点处安排 $s+1$ 个试验，用$f(P_0^{(i)})(0 \leqslant i \leqslant s)$ 表示对应的试验结果。命 P_0' 为点

$$\left(x_1^{(0)} + \frac{f(P_0^{(1)}) - f(P_0^{(0)})}{\delta_1}, \cdots, (x_S^{(0)} + \frac{f(P_0^{(S)}) - f(P_0^{(0)})}{\delta_S}\right)。$$

通过 $P_0^{(0)}$ 作超平面 π_0，它垂直于 $P_0^{(0)}$ 与 P_0' 的连线。则 R_0 被 π_0 分为两部分，丢掉不含有 P_0' 点的部分，留下的部分用 R_1 来表示。再在 R_1 中取一点 $P_1^{(0)}$，重复上面的过程，直到函数的极大点（或其一个邻近点）被得到为止。这一方法称为**切块法**。

切块法的道理如下：π_0 是在 $P_0^{(0)}$ 点处的等值面的切平面，而留下部分包含有函数的极大点。因此，主要问题在于如

何选择 $P_0^{(0)}$，$P_1^{(0)}$，… 点，使 z 的极大点能尽可能快地达到？关于 $P_0^{(0)}$，$P_1^{(0)}$，… 的选取方法，有不少建议。例如，若 R_0 是凸体，则取 $P_0^{(0)}$ 为 R_0 的重心即可，因为通过 R_0 的重心的任何超平面，均将 R_0 分成两部分，留下区域 R_1 的体积，恒小于原来区域 R_0 的体积的 $1-\frac{1}{e}$ 倍（见定理 4.1）。注意，数 $1-\frac{1}{e}$ 是与维数 s 无关的。因此，若要得到一个包含有 z 的极大点且体积 $\leqslant \varepsilon$ 的区域，则所需的试验次数的数量级为 $s\ln\frac{1}{\varepsilon}$。

因为物体的重心的座标，可以表为这物体上的一个重积分，故可以用第五章中阐述的 s 维空间的数值积分方法来近似计算重心的座标。

§4.12　0—1变元法

在优选法成为应用数学的一个分支之前，曾有过一些寻求函数极大点的方法。假定一个参数仅能在若干个水平中取值，最简单的情形是假定一个参数仅有两个选择，非此即彼。则这一参数可以用 0—1 变元来表示。例如，温度或取 300℃，或取 600℃，若温度取 300℃，则引入一个新变元，其值为 1，否则为 0。详言之，由

$$\eta=\frac{600℃-\xi}{600℃-300℃}$$

定义0—1变元η，此处参数ξ表示温度。

现在，我们来介绍稍加修订的0—1变元法。

假定一个参数ξ在每次选择中，仅限于在n个可能的水平ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，中取值。则它可以用0—1变元x_1，…，x_n来表示，此处，x_i只取值0或1，而且$x_1+\cdots+x_n=1$。

命T为一个取决于k个参数$\xi^{(1)}$，…，$\xi^{(k)}$的目标函数，此处，参数$\xi^{(i)}$有n个可能的水平$\xi_1^{(i)}$，…，$\xi_{n_i}^{(i)}$，它们对应的0—1变元分别为$x_1^{(i)}$，…，$x_{n_i}^{(i)}$。我们常假定T为线性模型（当然，这种假定的可靠性是很小的）

$$T=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^{(i)}x_j^{(i)}, \tag{4.17}$$

此处，对所有的$1\leqslant i\leqslant k$，

$$\sum_{j=1}^{n_i}x_j^{(i)}=1,\ \ x_j^{(i)}=0\text{或}1.$$

用

$$x_{n_i}^{(i)}=1-\sum_{j=1}^{n_i-1}x_j^{(i)}$$

代入(4.17)式，得

$$\begin{aligned}T&=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_i-1}\alpha_j^{(i)}x_j^{(i)}+\alpha_{n_i}^{(i)}\left(1-\sum_{j=1}^{n_i-1}x_j^{(i)}\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n_i}^{(i)}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i-1}\left(\alpha_j^{(i)}-\alpha_{n_i}^{(i)}\right)x_j^{(i)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18)式中共有$n_1+\cdots+n_k-k$个独立的0—1变元$x_j^{(i)}$，满足于

$$\sum_{j=1}^{n_i-1}x_j^{(i)}\leqslant 1,\ \ 1\leqslant i\leqslant k。$$

在 k 个参数 $\xi^{(1)}$，$\xi^{(2)}\cdots$，$\xi^{(k)}$ 中，每一个参数取一个水平做试验，即取一组 0—1 变元 $x_j^{(i)}$。于是我们注意到 T 的一个对应值。做了不同的 M 组试验之后，即得到 M 个以

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n_i}^{(i)},\ \alpha_j^{(i)}-\alpha_{n_i}^{(i)}\ \ (1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant n_i-1) \tag{4.19}$$

为未知元的联立线性方程组。未知元的个数为

$$N=n_1+\cdots+n_k-k+1。$$

因此，若 $M=N$，则可以从解联立线性方程组，得出 (4.19) 式中未知元的唯一的一组解，从而目标函数 T 被唯一确定了。但需注意，试验的安排必须使方程组的系数行列式不等于零。

一旦未知元确定之后，选择 $\xi^{(i)}$ 的最佳水平的方法如下：若

$$\alpha_j^{(i)}-\alpha_{n_i}^{(i)}<0,\ 1\leqslant j\leqslant n_i-1,$$

则定义 $j_0(i)=n_i$ 与 $x_{n_i}^{(i)}=1$，也就是取 $\xi^{(i)}$ 的第 n_i 个水平。若不然，命 $j_0(i)$ 使 $\alpha_{j_0(i)}^{(i)}-\alpha_{n_i}^{(i)}$ 为诸 $\alpha_j^{(i)}-\alpha_{n_i}^{(i)}$，$1\leqslant j\leqslant n_i-1$ 中的最大者，即取 $x_{j_0(i)}^{(i)}=1$.

按照这个模型，T在

$$\xi^{(1)}=\xi_{j_0(1)},\ \cdots,\ \xi^{(k)}=\xi_{j_0(k)}^{k}$$

中达到其极大值，因此，得出结论：这一点就是 T 的极大点。事实上，模型显然是不可靠的，因为一般说来，线性函数不存在极大点。因此，这一点仅仅是某特定意义下的极大点，也就是说，这一方法不属于能对收敛速度作出估计的优选法范畴。

由于线性模型的假定易于失真，故我们不再讨论如何选择

诸 $x_j^{(i)}$ 问题的细节，也不讨论如何用数理统计来分析试验结果的问题。总之，这个方法不能保证得到最优解，甚至不能保证得到在预定的 n_1，n_2，…，n_k 个点中的最优解。

例 考虑三种化学药品配成的最佳配方问题，其中每种药品的用量有三种水平，混合后加热，温度也有三个水平。

这是一个四个参数的问题，其中三个参数表示药品用量，另一个参数表示温度。按照上述方法，需要作

$$3\times 4-4+1=9$$

次试验，才能确定这个问题对应的线性模型。

参 考 文 献

[1] 华罗庚，优选学，科学出版社，北京，1981。

[2] 华罗庚与王元，数论在近似分析中的应用，科学出版社，北京，1978；Springer Verlag，1981。

英文版校订者注：参阅第三章后面的补充参考文献。

第五章　黄金数与数值积分

§5.1　引言

黄金数 $\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 不仅在黄金分割法中有用，而且在丢番图逼近论中亦具有重要作用。这使我们想到黄金数与数值积分之间的内在联系。基于 ω 的有理逼近

$$\left|\frac{F_{m-1}}{F_m}-\omega\right|<\frac{1}{\sqrt{5}F_m^2},$$

我们在 1960 年发现了一个非常有效的求积公式

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy\ \approx\frac{1}{F_m}\sum_{k=1}^{F_m}f\left(\frac{k}{F_m},\ \left\{\frac{F_{m-1}k}{F_m}\right\}\right),\tag{5.1}$$

此处 $\{\xi\}$ 表示 ξ 的分数部分。

为了将这一方法推广至 s 维的情况，这里 $s>2$，我们必须推广与黄金数 ω 相关联的 Fibonacci 数。

由于 $\omega = 2\cos\frac{2\pi}{5}$，所以可以先将黄金数推广为集合

$$\omega_j = 2\cos\frac{2\pi j}{m}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s-1,$$

其中 m 是一个 $\geqslant 5$ 的整数，$S = \frac{\varphi(m)}{2}$（φ 是 Euler 函数）。集合 $\{1,\ \omega_j(1 \leqslant j \leqslant s-1)\}$ 为分圆域 $\mathscr{R}_s = Q(\cos\frac{2\pi}{m})$ 的一组整底。利用 $\mathscr{R}_s$ 的一组独立单位系，我们可以得到整数集贯

$$(h_{1,l}, \cdots, h_{s-1,l}, n_l) \qquad (i = 1,2,\cdots) \tag{5.2}$$

满足

$$\left|\frac{h_{j,\ l}}{n_l} - \omega_j\right| < c(\mathscr{R}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}},\ \ 1 \leqslant j \leqslant s-1,$$

此处 $c(\mathscr{R}_s)$ 表示一个仅取决于 $\mathscr{R}_s$ 的正常数。(5.2) 的贯可以看作是 Fibonacci 贯的推广。因此我们得到用单和逼近重积分的一个 s 维求积公式

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1,\ \cdots,\ x_s) dx_1 \cdots dx_s$$

$$\approx \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} f\left(\frac{k}{n_l},\ \left\{\frac{h_{1,\ l}k}{n_l}\right\},\ \cdots,\ \left\{\frac{h_{s-1,\ l}k}{n_l}\right\}\right) \tag{5.3}$$

这一公式在实际应用时非常有效。但是，由于这一方法的应用必须有电子计算机，而且常常是有相当数学训练的科学工作者才需要用它，因此，这一方法确实无需加以普及。此外，为了实际应用的需要，我们编集了一个表，包括当 $2 \leqslant s \leqslant 18$ 时，若干组整数集合 (5.2) 及其对应的求积公式 (5.3) 的误差估计。

整数集贯 (5.2) 不仅对数值积分有用，凡服从一致分布的

伪随机数用得着的地方都可能有用，特别用于某些多因素优选法中寻找作为迭代的初始点。

我们关于高维空间数值积分的研究，说明了从事数学方法的普及工作，不仅没有妨碍我们的理论研究工作，它还起到促进的作用。

在这一章中，我们仅给出公式 (5.1) 的误差估计。关于这个理论的全面而深入的探讨，我们建议读者参看我们的书“数论在近似分析中的应用”[1]。

§5.2 若干引理

命 $f(x, y)$ 为一个周期函数，每一变数都有周期 1 且有 Fourier 展开

$$f(x, y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)},$$

此处 $|C(m, n)| \leqslant C(\bar{m}\bar{n})^{-\alpha}$,

其中 $\bar{x}=\mathrm{MAX}(1, |x|)$ 及 $\alpha(>1)$, $C(>0)$ 为常数。这种函数的全体构成的函数类，记为 $E(\alpha, C)$.

引理 5.1 命 m 与 $n(>0)$ 为两个整数，

则 $$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{mk}{n}}=\begin{cases}1, & \text{当} n \mid m, \\ 0, & \text{其它情形。}\end{cases}$$

证 当 $n \mid m$ 时，引理显然成立。否则，$e^{2\pi i \frac{m}{n}} \neq 1$，所以

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{mk}{n}}=\left(e^{2\pi i \frac{mn}{n}}-1\right)\left(e^{2\pi i \frac{m}{n}}-1\right)^{-1}=0. \qquad \square$$

引理 5.2 对于任意正整数 n、a_1 与 a_2，这里 (a_i, n)

$=1$，$i=1,2$〔此处（，）表示最大公约数〕，皆有

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_1k}{n},\ \frac{a_2k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant C\left(\wedge(a_1,\ a_2)+2^{\alpha+1}(1+2\zeta(\alpha))^2n^{-\alpha}\right),$$

此处 $\zeta(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\alpha}$ 及

$$\wedge(a_1,a_2)=\sum_{\substack{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\bmod n)\\ -\frac{n}{2}<m_i\leqslant\frac{n}{2}}}{}'(\overline{m}_1,\overline{m}_2)^{-\alpha},$$

其中 $\sum'$ 表示在求和范围中去掉 $m_1=m_2=0$ 项。

证 由引理 5.1 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_1k}{n},\ \frac{a_2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ m_2)e^{2\pi i\frac{(a_1m_1+a_2m_2)k}{n}}$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ m_2)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i\frac{(a_1m_1+a_2m_2)k}{n}}$$

$$=\sum_{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\bmod n)}C(m_1,\ m_2)$$

$$=C(0,\ 0)+\sum_{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\bmod n)}{}'C(m_1,\ m_2).$$

由于 $\quad C(0,\ 0)=\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy,$

所以

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_1k}{n},\ \frac{a_2k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant C\Omega(a_1,a_2),$$

此处 $\Omega(a_1, a_2) = \sum\limits_{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\mathrm{mod} n)} (\overline{m}_1\overline{m}_2)^{-\alpha}.$

若 $(m_1^{(0)}, m_2^{(0)})$ 是同余式

$$a_1m_1 + a_2m_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ n) \tag{5.4}$$

的一组解，此处 $-\frac{n}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{n}{2}(i=1, 2)$，则

$$m_i = m_i^{(0)} + l_in, \ i=1, 2, \tag{5.5}$$

也是 (5, 4) 式的一组解。另一方面，(5, 4) 式的任意解皆可以表为形式 (5.5) 式，所以

$$\Omega(a_1,a_2) = \sum_{\substack{a_1m_1+a_2m_2\equiv 0(\mathrm{mod} n)\\ -\frac{n}{2}<m_i^{(0)}\leqslant\frac{n}{2}}}{}' \left((\overline{m_1^{(0)}+l_1n})(\overline{m_2^{(0)}+l_2n})\right)^{-\alpha}.$$

由于 $(a_i, n)=1(i=1, 2)$，所以，$m_1^{(0)}$ 与 $m_2^{(0)}$ 给了一个之后，另一个就唯一地确定了。由于

$$\sum_{-\frac{n}{2}<m\leqslant\frac{n}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\overline{m+ln})^{-\alpha} \leqslant 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \overline{m}^{-\alpha} = 1 + 2\zeta(\alpha)$$

与 $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}{}' (\overline{m+ln})^{-\alpha} \leqslant 2\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left(n(l-\frac{1}{2})\right)^{-\alpha} \leqslant 2^{\alpha+1}\zeta(\alpha)n^{-\alpha},$

所以 $\Omega(a_1,a_2) - \wedge(a_1, a_2)$

$$\leqslant 2\sum_{\substack{a_1m_1^{(0)}+a_2m_2^{(0)}\equiv 0(\mathrm{mod} n)\\ -\frac{n}{2}<m_i^{(0)}\leqslant\frac{n}{2}}} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty}{}' (\overline{m_1^{(0)}+l_1n})^{-\alpha} \sum_{l_2=\infty}^{\infty} (\overline{m_2^{(0)}+l_2n})^{-\alpha}$$

$$\leqslant 2^{\alpha+1}(1+2\zeta(\alpha))^2n^{\alpha}.$$

□

§ 5.3 求积公式的误差估计

定理 5.1　命 n 为一个 >3 的整数。则

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n}f\left(\frac{k}{F_n},\ \frac{F_{n-1}k}{F_n}\right)\right|$$

$$\leqslant C(4\zeta(\alpha)5^{\alpha}\omega^{-\alpha}(\ln\frac{1}{\omega})^{-1}F_n^{-\alpha}\ln(\sqrt{5}\omega F_n)$$

$$+2^{\alpha+1}(1+2\zeta(\alpha))^2F_n^{-\alpha}).$$

证　首先我们估计和

$$\wedge(1,F_{n-1})=\sum_{\substack{m_1+F_{n-1}m_2\equiv 0(\bmod Fn)\\ -\frac{F_n}{2}<m_i\leqslant\frac{F_n}{2}}}{}^{\prime}(\overline{m}_1\overline{m}_2)^{-\alpha}$$

显然 $m_2\neq 0$, 否则，由 $F_n|m_1$ 与 $-\frac{F_n}{2}<m_1\leqslant\frac{F_n}{2}$ 可知 $m_1=0$, 此为矛盾。任意给出 m_2, 我们得 $m_1=yF_n-F_{n-1}m_2$, 此处 y 为满足

$$-\frac{1}{2}<y-\frac{F_{n-1}}{F_n}m_2\leqslant\frac{1}{2}$$

的整数。因此

$$\wedge(1,F_{n-1})\leqslant 2\sum_{1\leqslant x\leqslant\frac{F_n}{2}}(\overline{x}(\overline{F_{n-1}x-F_ny}))^{-\alpha}\leqslant 2\sum_{m=2}^{n-1}J_m,\tag{5.6}$$

此处

$$J_m=\sum_{F_{m-1}\leqslant x<F_m}(\overline{x}(\overline{F_{n-1}x-F_ny}))^{-\alpha}.$$

注意 $F_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}(F_{n-1}+F_{n-2})=\frac{1}{2}F_n$. 由定理 2.2 可知

$$F_mF_{m-2}-F_{m-1}^2=(-1)^{m-1},$$

所以，任意给出整数 x 与 y，方程组

$$x=F_{m-1}u+F_mv,$$

$$y=F_{m-2}u+F_{m-1}v,$$

有唯一的整数解 u，v。显而易见，当 $F_{m-1}\leqslant x<F_m$ 时，有

$$uv<0.$$

现在我们将证明在区间 $[F_{m-1}, F_m)$ 中任意两个不同的整数 x 与 x'，它们分别对应的整数 u 与 u' 亦不相同。否则，由

$$x=F_{m-1}u+F_mv,$$

$$x'=F_{m-1}u+F_mv',$$

可知 $F_m|(x-x')$，这不可能，故得所欲论证。由引理 3.1 可知

$$F_{n-1}F_k-F_nF_{k-1}=(-1)^{k-1}F_{n-k},$$

所以 $|F_{n-1}x-F_ny|$

$$=|F_{n-1}(F_{m-1}u+F_mv)-F_n(F_{m-2}u+F_{m-1}v)|$$

$$=|(F_{n-1}F_{m-1}-F_nF_{m-2})u+(F_{n-1}F_m-F_nF_{m-1})v|$$

$$=|F_{n-m+1}u-F_{n-m}v|\geqslant F_{n-m+1}|u|.$$

因此

$$J_m\leqslant\sum_{F_{m-1}\leqslant x<F_m}(xF_{n-m+1}|u|)^{-\alpha}\leqslant(F_{m-1}F_{n-m+1})^{-\alpha}\sum_{u=-\infty}^{\infty}{}' \bar{u}^{-\alpha}$$

$$=2\zeta(\alpha)(F_{m-1}F_{n-m+1})^{-\alpha} \tag{5.7}$$

由引理 3.1 可知，当 $k\geqslant1$ 时，

$$\omega^{-k+1}\geqslant F_k\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\omega^{-k+1}(\omega^{-1}-\omega)=\frac{1}{\sqrt{5}}\omega^{-k+1},$$

所以 $$k-2 \leqslant \frac{\ln F_n + \ln(\sqrt{5}\omega)}{\ln(\omega^{-1})}$$

及 $$F_{m-1}F_{n-m+1} \geqslant \frac{1}{5}\omega^{-n+2}.$$

因此，由 (5.7) 式可知

$$J_m \leqslant 2\zeta(\alpha)5^\alpha\omega^{-2\alpha}\omega^{n\alpha} \leqslant 2\zeta(\alpha)5^\alpha\omega^{-\alpha}F_n^{-\alpha},$$

从而由 (5.6) 式得

$$\begin{aligned}\wedge(1,\ F_{n-1}) &\leqslant 4\zeta(\alpha)5^\alpha\omega^{-\alpha}(n-2)F_n^{-\alpha}\\ &\leqslant 4\zeta(\alpha)5^\alpha\omega^{-\alpha}(\ln\frac{1}{\omega})^{-1}(\ln F_n + \ln(\sqrt{5}\omega))F_n^{-\alpha}.\end{aligned}$$

故由引理 5.2 可知定理成立。 □

§5.4 求积公式的Ω结果和下界

定理 5.2 对于任何整数 $n>1$ 及两个与 n 互素的整数 a_1 与 a_2 皆有

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{a_1k}{n},\ \frac{a_2k}{n})\right| \geqslant \alpha C\frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

证 取 $E(\alpha,\ C)$ 内的函数

$$f(x,y) = C\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(\overline{m}_1\overline{m}_2)^{-\alpha}e^{2\pi i(m_1x+m_2y)}.$$

则

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x, y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{a_1 k}{n}, \frac{a_2 k}{n})\right| = C\Omega$$

此处 $\Omega = \sum_{a_1 m_1 + a_2 m_2 \equiv 0(\bmod n)}' (\bar{m}_1 \bar{m}_2)^{-\alpha}.$

由于 $(a_1, n) = 1$，所以存在 $\bar{a}_1$，使

$$\bar{a}_1 \bar{a}_1 \equiv 1(\bmod\ n).$$

因此 $\Omega = \sum_{m_1 + am_2 \equiv 0(\bmod n)}' (\bar{m}_1 \bar{m}_2)^{-\alpha}.$

此处 $a = \bar{a}_1 a_2(\bmod\ n)$，$1 \leqslant a < n.$

将 $\frac{a}{n}$ 表为简单连分数，并假定 $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_m}{q_m}$ 为其渐近分数，此处 $p_m = a$ 及 $q_m = n$. 由定理 2.5 可知

$$\left|\frac{p_l}{q_l} - \frac{p_m}{q_m}\right| \leqslant \frac{1}{q_l q_{l+1}}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m-1,$$

即 $$|p_l q_m - q_l p_m| \leqslant \frac{q_m}{q_{l+1}}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m-1.$$

由于 $m_1 = p_l q_m - q_l p_m$，$m_2 = q_l (0 \leqslant l \leqslant m-1)$ 为同余式

$$m_1 + am_2 \equiv 0(\bmod\ n)$$

的解，所以

$$\Omega \geqslant \sum_{l=1}^{m-1} (q_l(p_l q_m - q_l p_m))^{-\alpha} \geqslant \sum_{l=0}^{m-1} (q_m q_l)^{-\alpha} q_{l+1}^{\alpha}$$

$$\geqslant m\left(\frac{q_m}{q_{m-1}} \frac{q_{m-1}}{q_{m-2}} \cdots \frac{q_1}{q_0}\right)^{\frac{\alpha}{m}} q_m^{-\alpha} = mq_m^{\frac{\alpha}{m}} q_m^{-\alpha}$$

$$= (me^{\frac{\alpha}{m}\ln q_m}) q_m^{-\alpha} \geqslant \alpha q_m^{-\alpha} \ln q_m,$$

其中我们用到这样的不等式，即有限个正整数的算术平均不

小于它们的几何平均。 □

由定理 5.2 可知，除一个常数之外，由定理 5.1 给出的误差估计是臻于至善的。

§ 5.5 注 记

对于 $s=2$ 的梯形公式，我们有

定理 5.5 命 $n=m^2$. 则

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy-\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}f\left(\frac{l_1}{m},\ \frac{l_2}{m}\right)\right|$$
$$\leqslant C(2\zeta(\alpha)+1)^2 n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{5.8}$$

证 由引理 5.1 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}f\left(\frac{l_1}{m},\ \frac{l_2}{m}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ m_2)e^{2\pi i\frac{(l_1m_1+l_2m_2)}{m}}$$
$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}C(m_1,m_2)\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}$$
$$\times e^{2\pi i\frac{(l_1m_1+l_2m_2)}{m}}$$
$$=C(0,0)+\sum_{\substack{m_1\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)\\ m_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)}}{}' C(m_1,m_2)$$

所以

$$\sup_{f\in E(\alpha,\ C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy-\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}f\left(\frac{l_1}{m},\ \frac{l_2}{m}\right)\right|$$

$$\leqslant C \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m) \\ m_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)}} (\overline{m}_1 \overline{m}_2)^{-\alpha}$$

$$\leqslant C m^{-\alpha}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{-\alpha}\right)^2 = C(2\zeta(\alpha)+1)^2 n^{-\frac{\alpha}{2}}. \qquad \square$$

$f(x,y) = Cm^{-\alpha}(e^{2\pi imx} + e^{-2\pi imx})$, 则 $f(x,y) \in E(\alpha,\ C)$, 而且

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m},\ \frac{l_2}{m}\right)\right| = 2Cn^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

这说明 (5.8) 式中的误差项 $n^{-\frac{\alpha}{2}}$ 已不允许再作实质性的改进，它比由定理 5.1 给出的误差项 $n^{-\alpha}\ln n$ 坏多了。还应注意，由 Monte Carlo 方法给出的求积公式仅能得到概率意义下的误差项 $O(n^{-\frac{1}{2}})$。

参 考 文 献

〔1〕华罗庚与王元，数论在近似分析中的应用，科学出版社，北京，1978; Springer Verlag, 1981.

英文版校订者注：一些补充参考文献如下。

〔2〕Davis P.J.,and P.Rabinowitz.Method of Numerical Integration.Academic Press,1975.

〔3〕Lang S.Algebraic Number Theory.Springer Verlag, 1986.

〔4〕Stewart I.N.and D.O.Tall.Algebraic Number Theory.2nd ed., Chapman and Hall Ltd., 1987.

〔5〕Stroud A.M.Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations.Springer Verlag, 1974.

第六章　统筹方法

§6.1　引言

处理生产中的组织和管理问题的方法叫**统筹法**。从 1965 年至 1982 年，我们与大量工厂企业的长期接触中，确认这是一个很好的普及项目。

CPM、PERT、机器排序、运输问题中的图上作业法与单纯形方法，都是曾经在我国普及过的方法。特别是 CPM 与 PERT 有广泛的应用。我们将在本章与下一章分别介绍这两个方法。

§6.2　统筹法(CPM)

先举一个例子，用以说明方法。假定有一项工程，共有九道工序。工程及其工序可以用有向图来模型化。每道工序用两

个节点及其间的一条有向弧来表示。每个节点表示了所有流向节点的工序均已完成，以及没有一个离开节点的工序开始进行的即时的点。例如[1] ——→[2] 代表工序(1～2)。一道工序所需的时间(通常以“天”为单位)，用数字写在对应的有向弧旁，例如[1] —3→[2] 。若仅当工序(3～6)和(4～6)完成之后，工序(6～7)才能开始，就如图 6.1 所示。还可以引入所需时间为

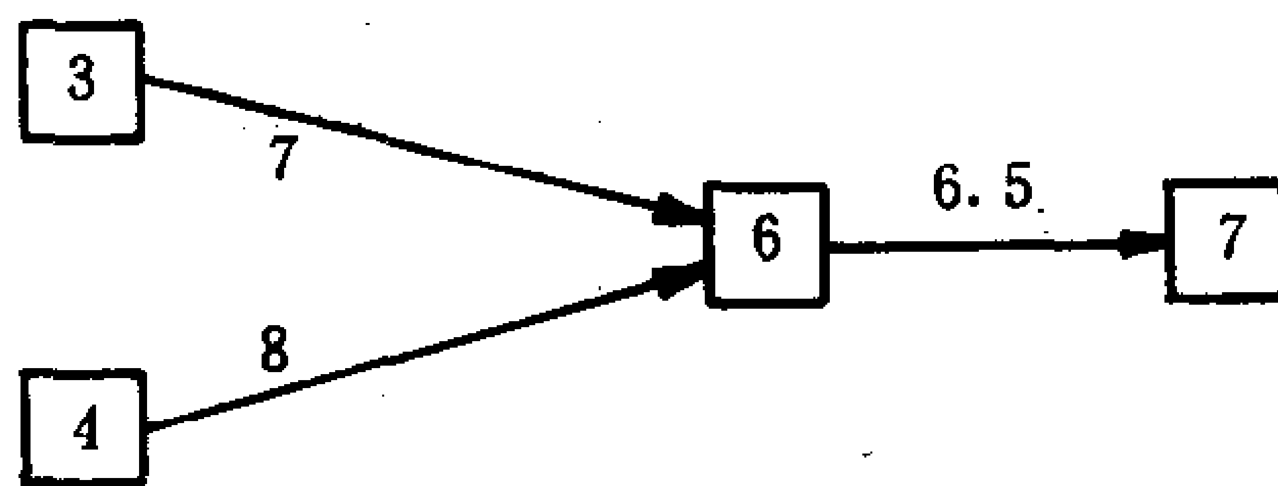


图 6.1

零的虚拟工序(伪工序)，例如[1] —0→[2] 。图 6.2 画了一个典型的图。这个图称为**统筹图**(CP 图)。

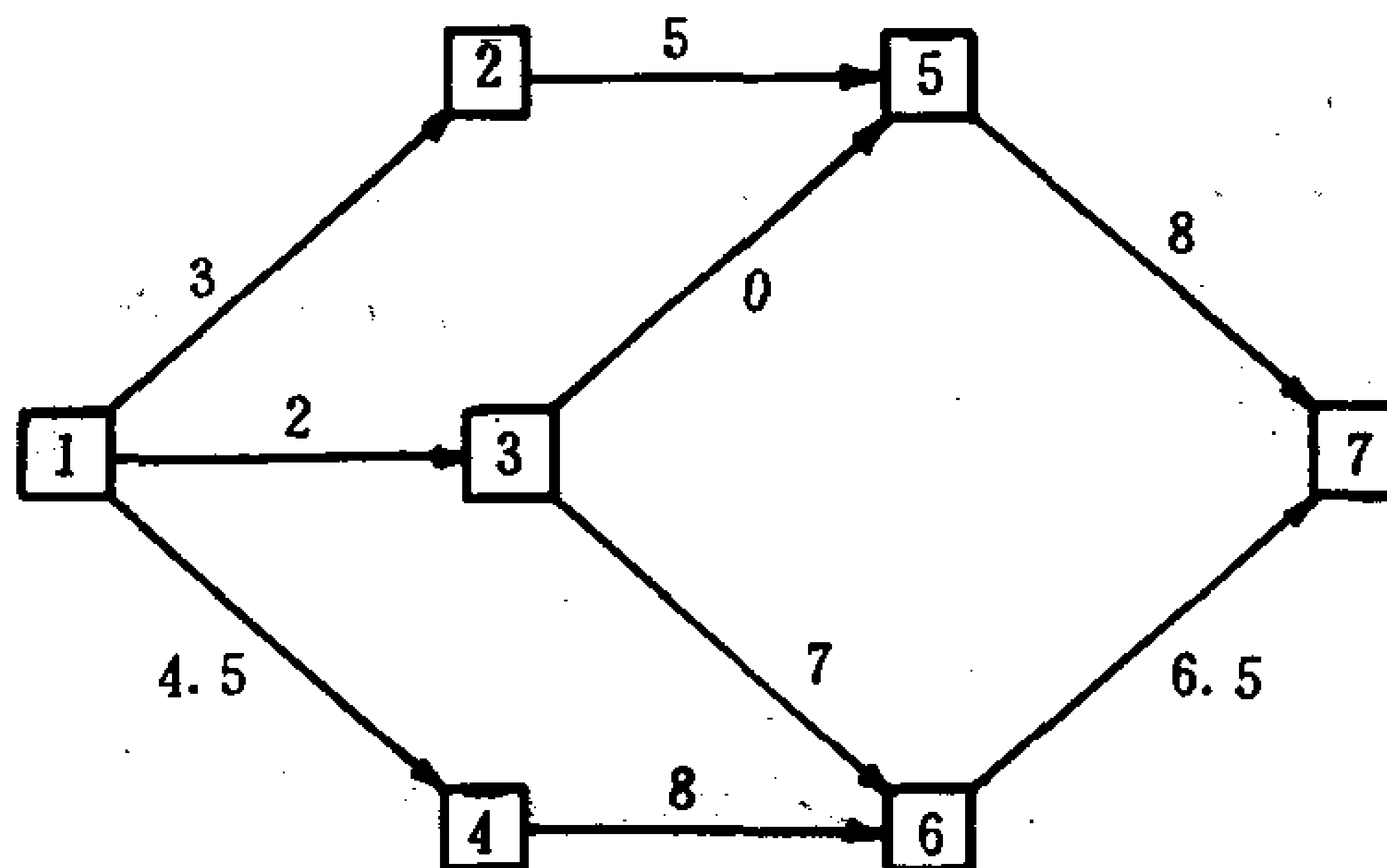


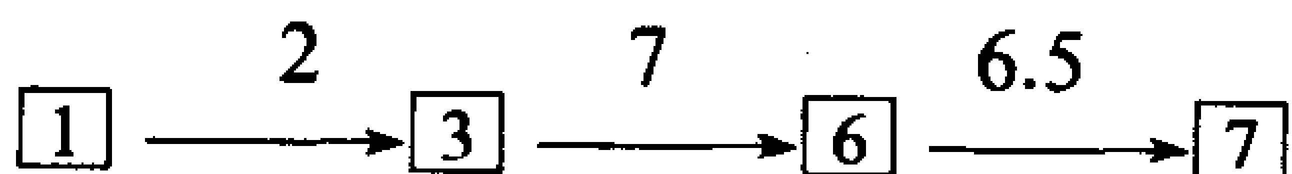
图 6.2

工序也称为任务。

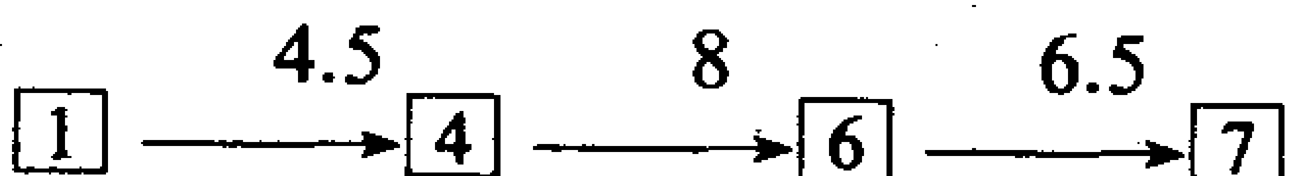
考虑一张 CP 图上所有的起点(无输入有向弧的节点)与终点(无输出有向弧的节点)。例如，在图 6.2 中只有一个起点(1)与一个终点 (7)。从一个起点至一个终点，沿所经的每条有向路线，计算共需的时间。注意，在一个起点与一个终点之间，可能有几条有向路线，所以，所有的路线都要予以考虑。例如，在图 6.2 中，沿路线







与



所需的时间分别为 $3+5+8=16$，$2+0+8=10$，$2+7+6.5=15.5$ 与 $4.5+8+6.5=19$。整个工程所需的总工期，等于 CP 图中连接起点至终点的所有路线中所需时间最长者。这种耗时最长的路线称为**主要矛盾线**(或关键路线)，记为 CP。注意，CP 往往不是唯一的。

若 CP 上的一道工序耽误一天完工，则工程的总工期拖延一天。若诸主要矛盾线上的一道工序缩短一天工期，则工程的总工期提前一天。由于其它路线现在可能是关键的，因此，工程的总工期可能提前不到一天。为了避免窝工，一些非主要矛盾线上的工程任务，可以延缓些日子开工。

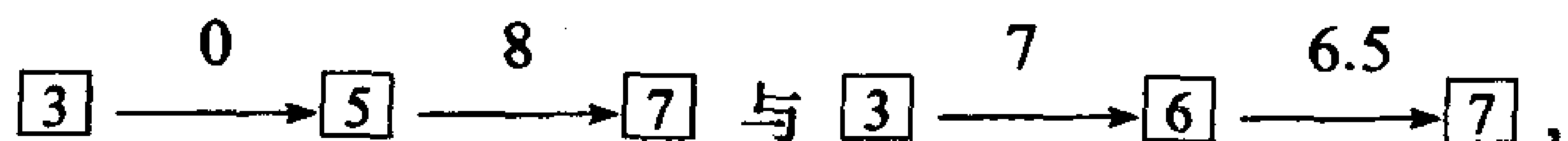
§6.3 时 差

考虑每一任务的**最早可能开工时间**，即若这一任务的所有前部任务均已开工，它尽可能早地开工的时间。例如，在图6.2中，(2～5)只有在(1～2)完成以后才能开工，因此，(2～5)的最早可能开工时间是3(指三天后)。类似地，任务(4～6)的最早可能开工时间是4.5。对于任务(6～7)，情况就不同了。因为从 1 到 6 有两条路线，即



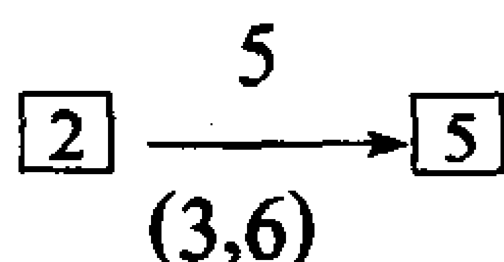
它们所需的时间是2+7=9与4.5+8=12.5，所以，任务(6～7)的最早可能开工时间为12.5.

一项任务的**最迟必须开工时间**是指不致拖延整个工程完成的前提下，这项任务开工的最迟时间。在我们的例中，工程的总工期是19天，若任务(5～7)在整个工程开工后第12天，即第11天结束之后，还不开工，就要耽误整个工程了。因此任务(5～7)的最迟必须开工时间是19−8=11.同理，(6～7)的最迟必须开工时间是19−6.5=12.5.由于在 3 与 7 之间有两条路线，即



它们所需的时间各为0+8=8与7+6.5=13.5，因此，(1～3)的最迟必须开工时间是19−8−2=9与19−13.5−2=3.5中较小的一个，那么，为了不致拖延整个工程工期，任务(1～3)必须在工程开工后3.5天内开工。一个任务的最早可能开工时间与最

迟必须开工时间，可以在有向弧旁用序偶来形象地予以表示，序偶中第一个数为最早可能开工时间。例如，任务(2～5)的最早可能开工时间是 3，最迟必须开工时间是 19−8−5＝6，它将表示为



用这种方法，我们得到图 6.3 中的图。

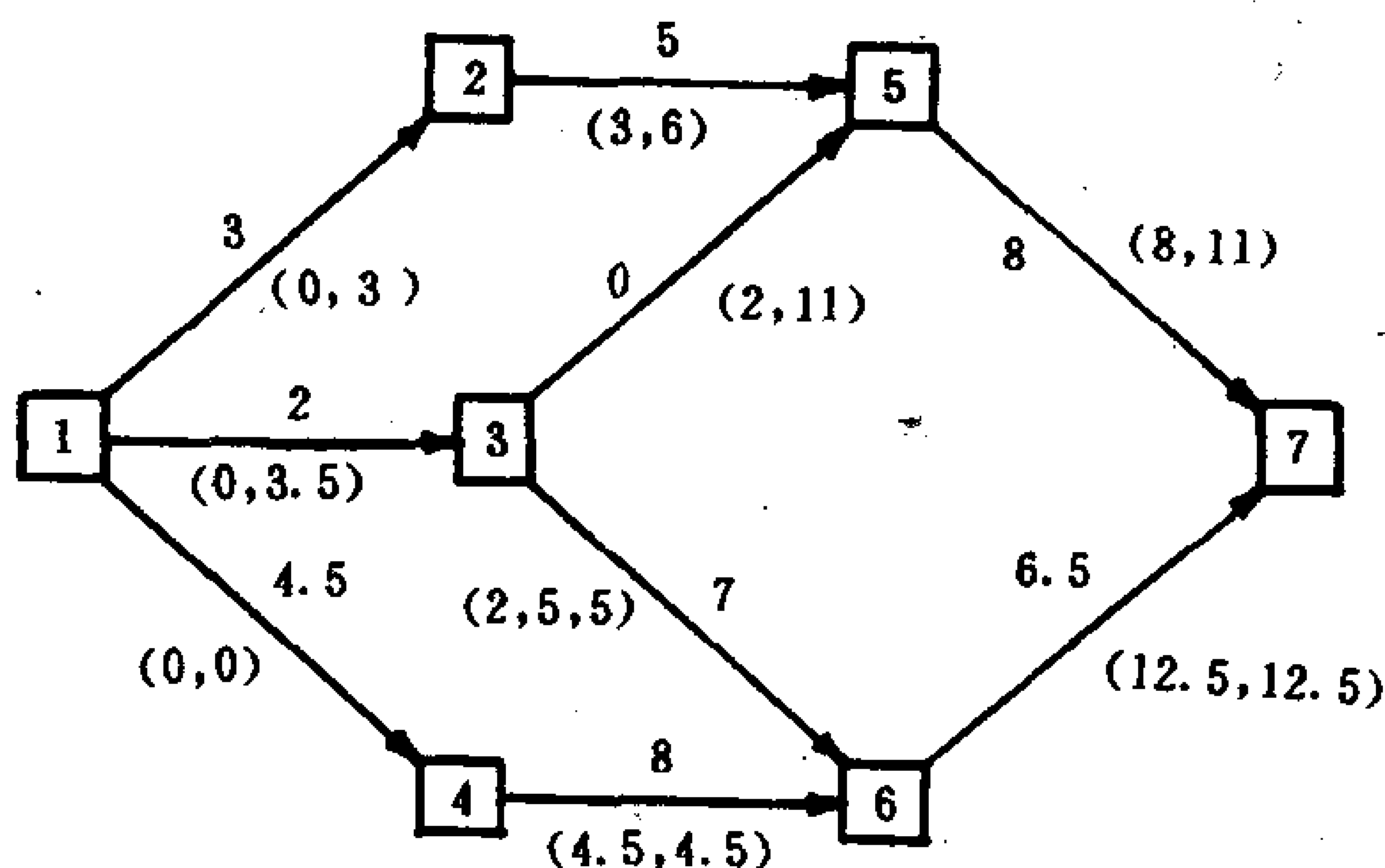


图 6.3

一个任务的最迟必须开工时间与最早可能开工时间之差，称为该任务的**时差**。上述例子中各工序的时差如表 6.1 所示。

表 6.1

工序	1～2	1～3	1～4	2～5	3～5	3～6	4～6	5～7	6～7
时差	3	3.5	0	3	9	3.5	0	3	0

主要矛盾线上各工序的时差显然为零，反之，将时差为零的各工序连接起来，即得主要矛盾线。给一个工序规定了开工时间，将影响其它工序的可能开工时间。例如，若工序(1～2)

在第四天开工，则工序(2～5)与(5～7)的新时差就等于零了。

§6.4 平行作业与交叉作业

为了缩短整个工程的工期，就必须缩短诸主要矛盾线上一些工序的工期。方法有二，一是平行作业，一是交叉作业。

若一项任务 I 可以拆成几项任务同时做，则称 I 可以平行作业。假定工序(10～20)所需的时间是 100(见图 6.4)，它可以拆成同样的两道工序同时做。

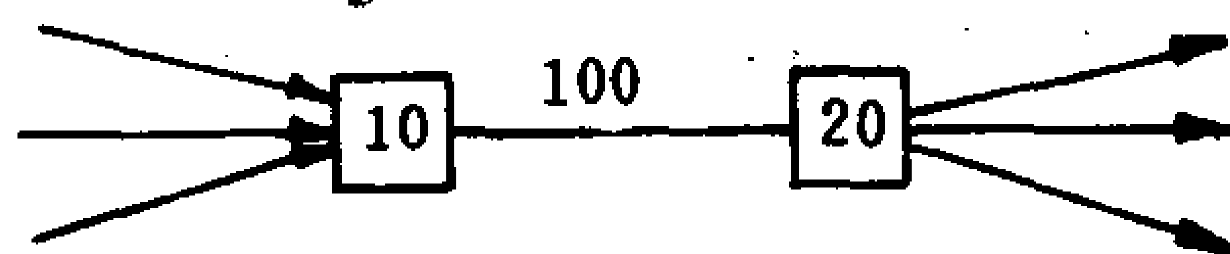


图 6.4

例如一台机床上做 100 个零件，改为用两台同样的机床，各做 50 个零件。又如，一条水沟两端同时开挖。这类的 CP 图怎么画?可以引入伪工序，得到图 6.5，也可以将图画成图 6.6 与 6.7 那样。不管哪种情况，为了区别节点[10]与[20]之间，

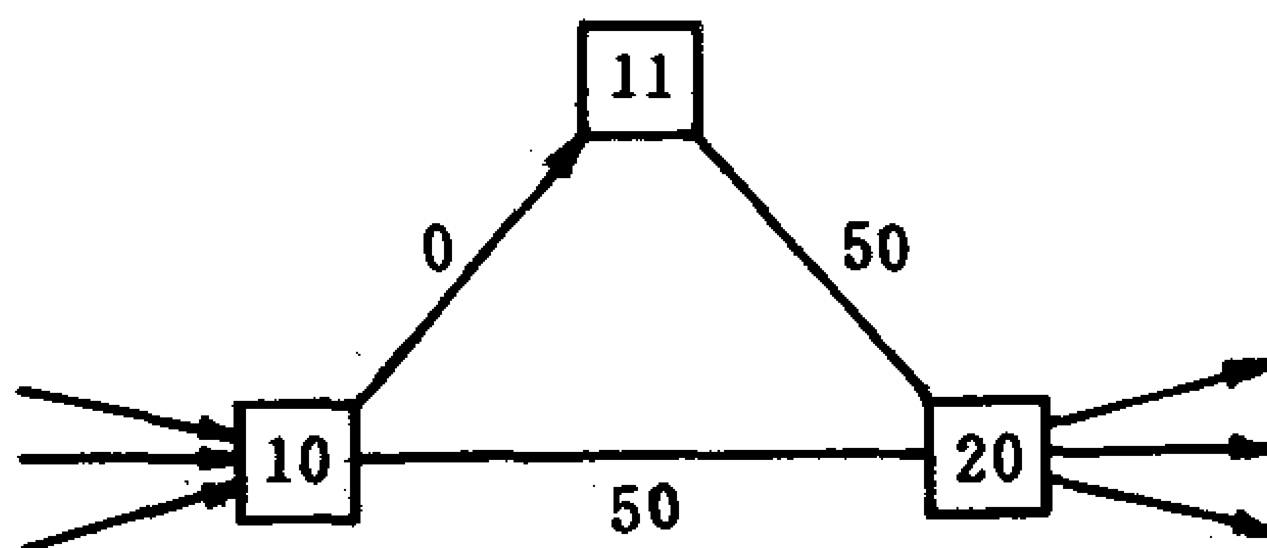


图 6.5

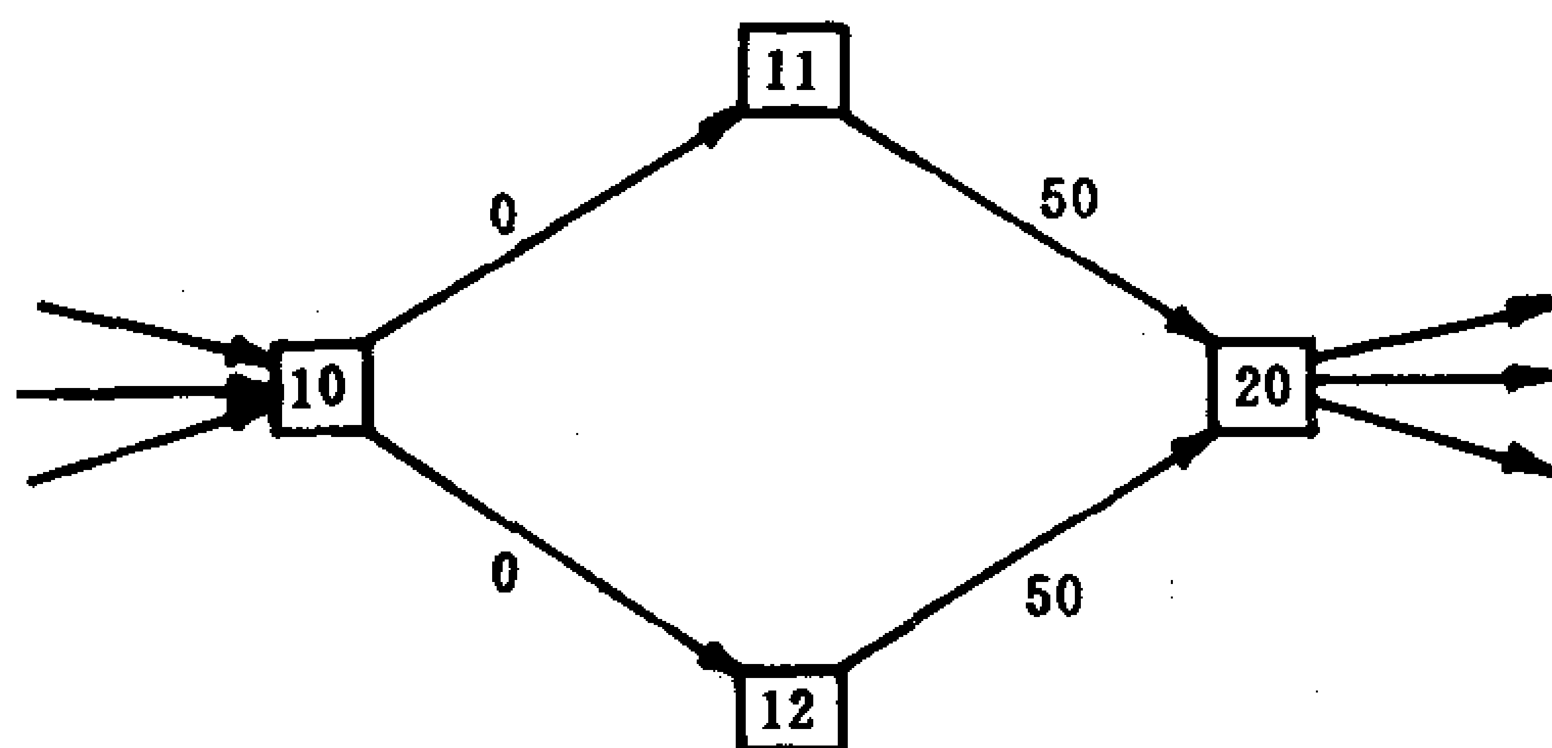


图 6.6

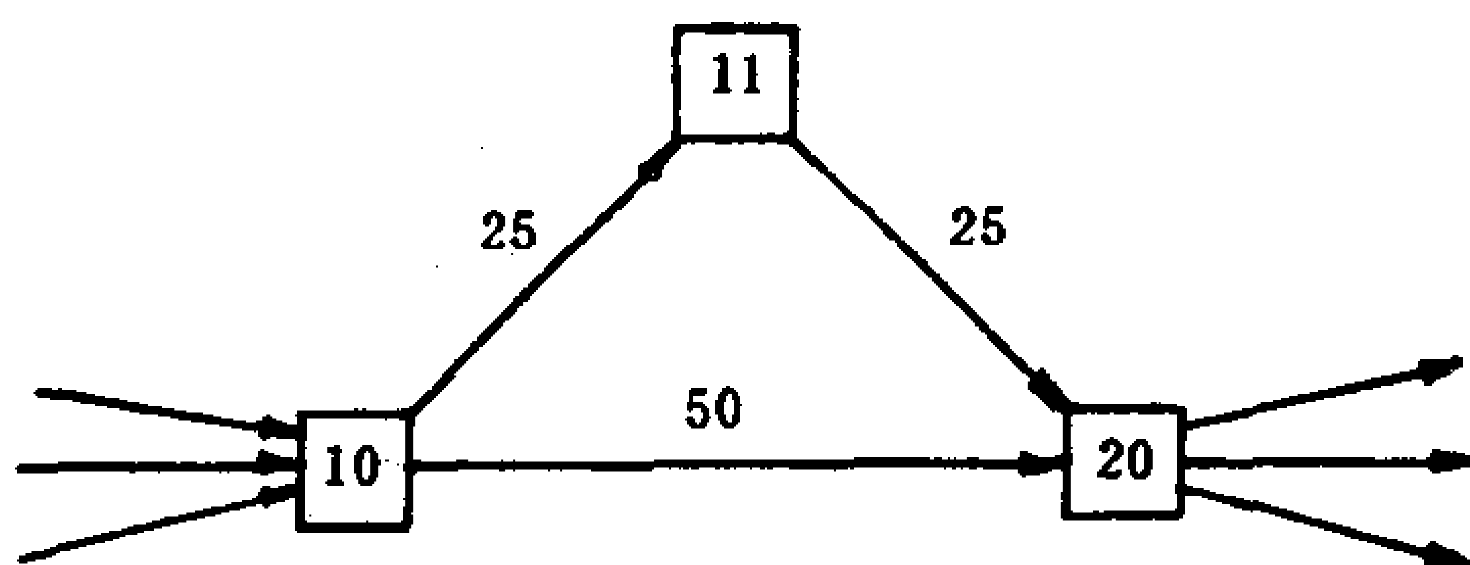


图 6.7

现在有了两道工序，节点[11]与[12](或其中的一个)是必需引进的。

其次，我们用一个例子来说明交叉作业。例如 CP 图如图 6.8 所示，其中 *A*、*B*、*C*、*D* 表示工序的名称(不要与前面的规定混淆)。

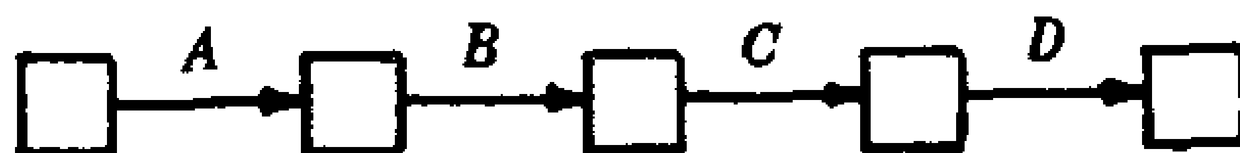


图 6.8

假定 *A* 做完一部分后，*B* 就可以开始做，对于 *B*、*C* 与 *C*、*D*，情况也是一样。则 *A*、*B* 与 *C* 可以分别拆成 A_1、A_2;

B_1、B_2 与 C_1、C_2，工程可以用图 6.9 或 6.10 所示的两种 CP 图来模型化，有向弧旁标"0"的表示伪工序。

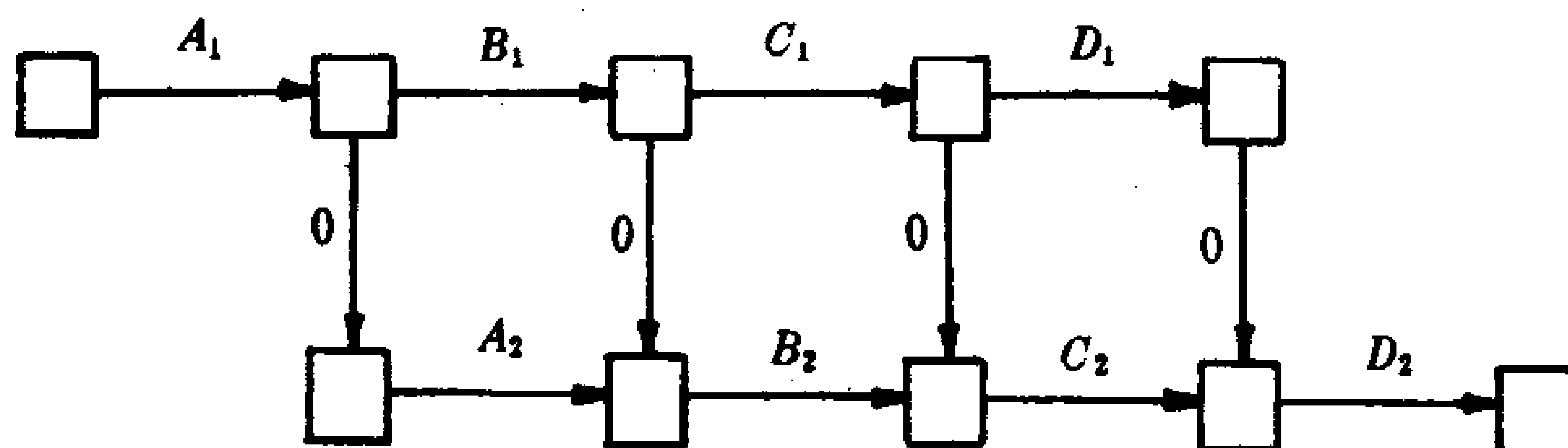


图 6.9

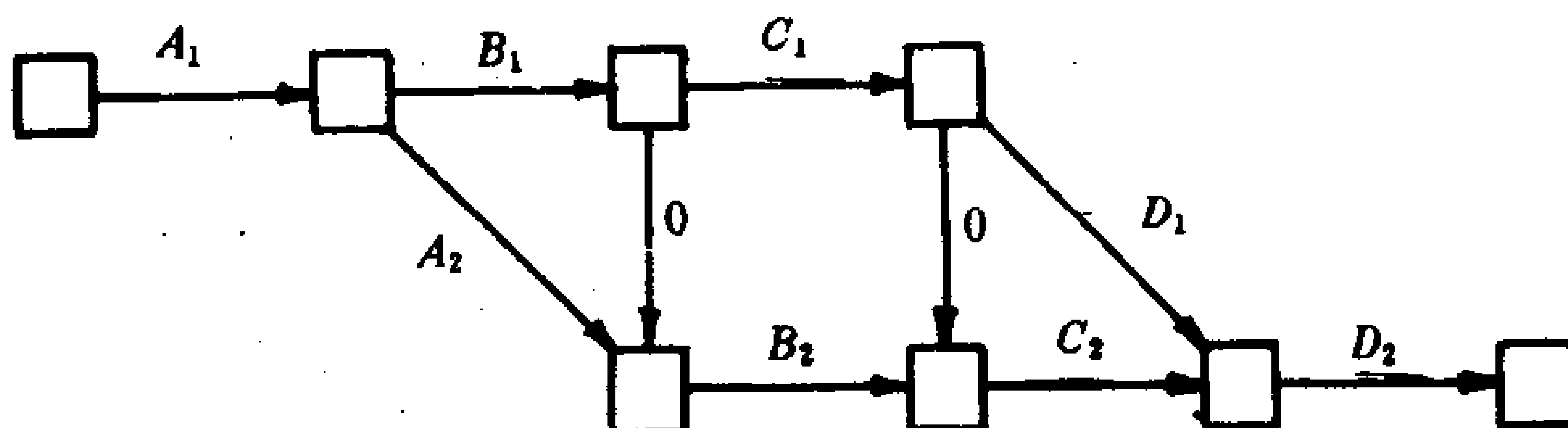


图 6.10

注意图 6.11 的图有逻辑上的错误。它说明 C_1 与 D_1 只有当 A_2 与 B_2 完成之后才能开始，这是完全不必要的，因此图形是不正确的。

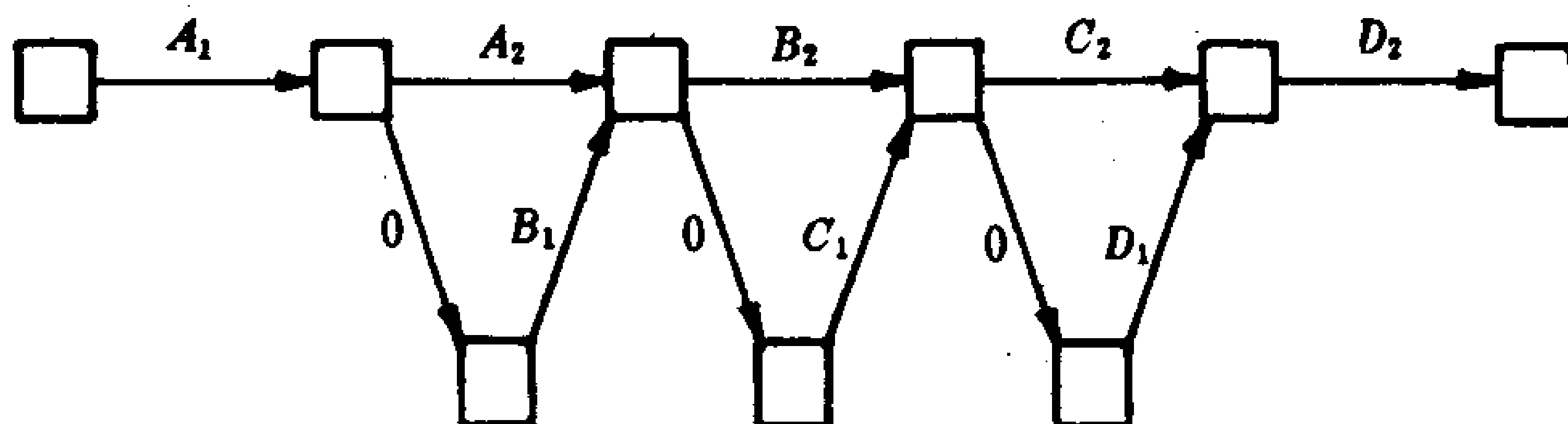


图 6.11

假定每一道工序 X（$X=A$、B、C、D）可能拆成具有下述前提条件的三道工序 X_1、X_2 与 X_3. 对每道工序 X, X_i 都在

X_{i+1} 之前完成，$i=1$，2。亦即只有工序 A_i 完成后，工序 B_i 才能开始，以及 B_i、C_i 分别完成后，C_i、D_i 才分别可以开始，$i=1$、2、3.则这种情况的 CP 图如图 6.12 所示。

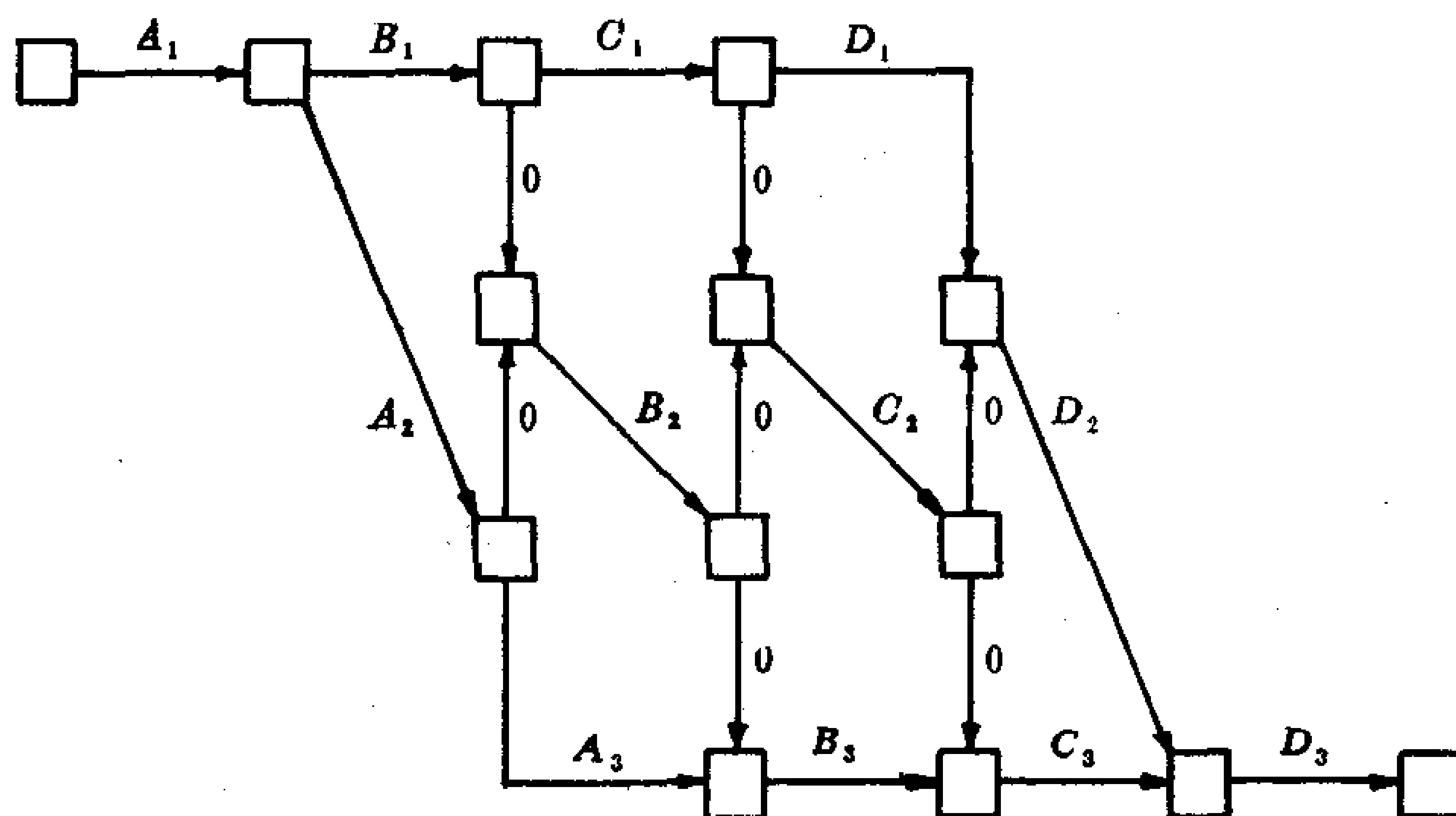


图 6.12

图 6.13 又包含了一个逻辑错误，图上看出，只有 B_1 完成后，A_3 才能开始，或 C_1、D_1 完成后，B_3、C_3 才能开始。这些都是不必要的条件。

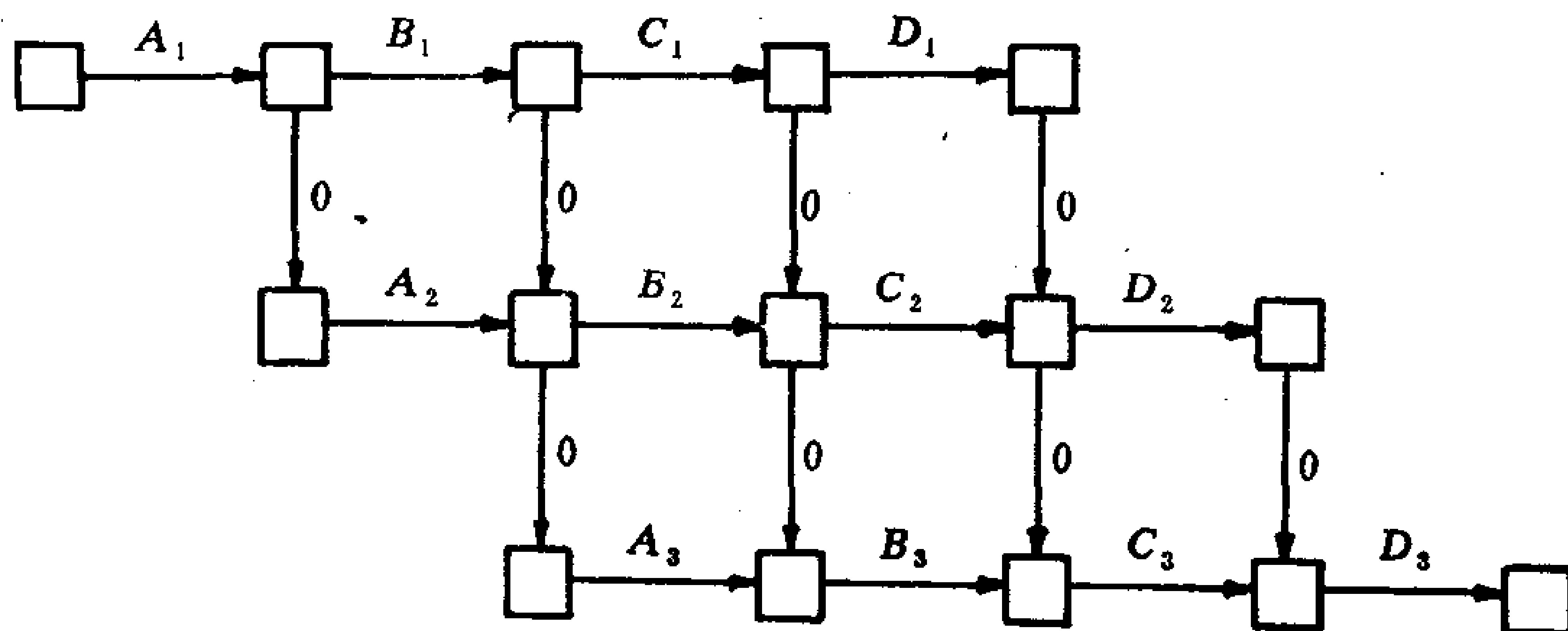
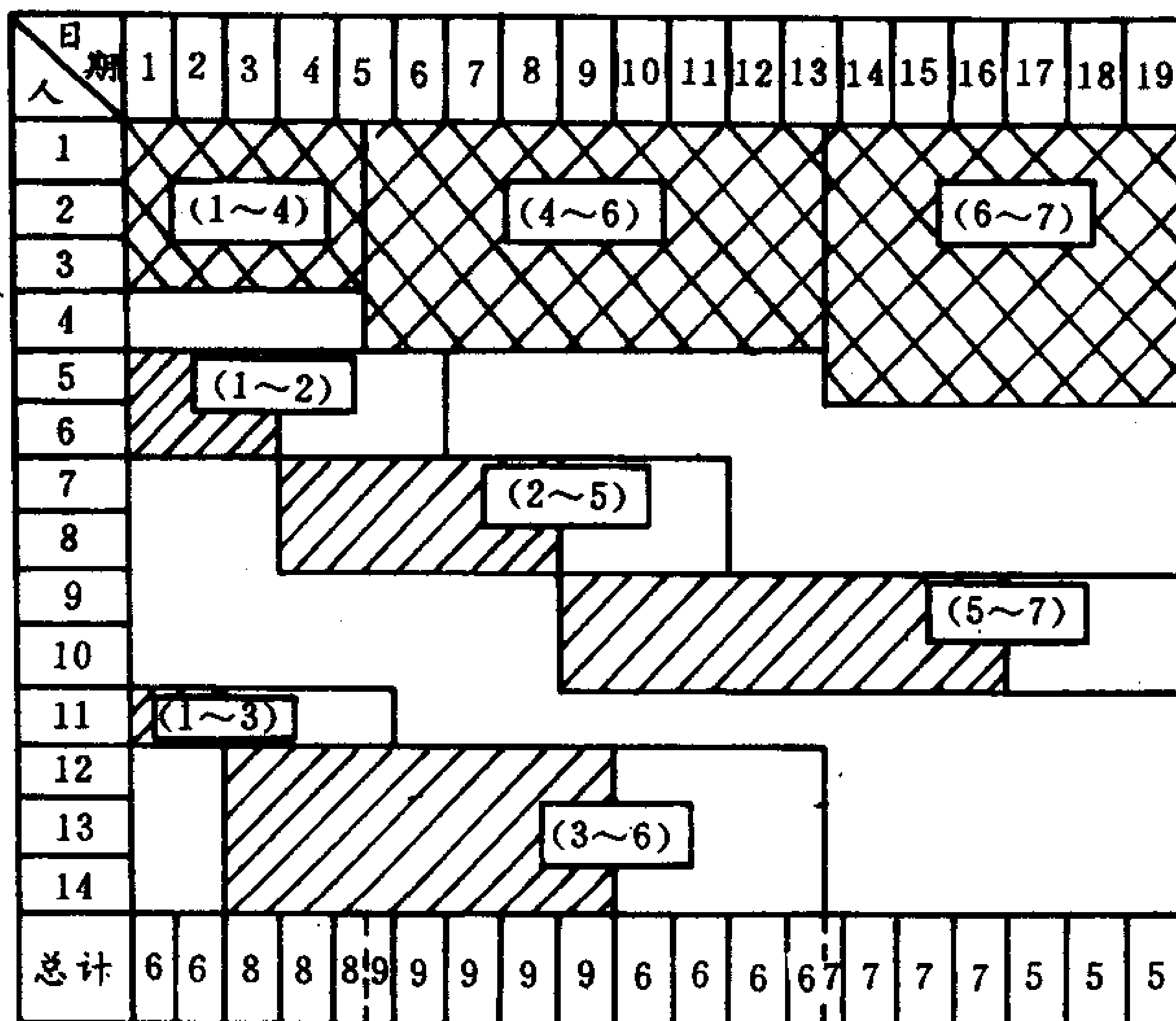


图 6.13

§ 6.5 工人配备表

有时，我们可以向非主要矛盾线上的工序中作适当的调度，以减少工人数或设备数。作为一个例子，假定 § 6.2 的例子中各工序所需的工人数如表 6.2 给出那样。这张表反映出该

表 6.2



工程逐日需要工人数的情况。例如，工序(1～4)从第 1 天到第 4.5 天，需要 3 个工人；工序(3～6)从第 3 天到第 9 天，需要 3 个工人，等等。网格阴影的区域表示 CP 上各工序需要人员的情况，斜线阴影区域则表示非主要矛盾线上各工序要人的情况，它右边的空白区域的长度表示了时差，高度表示了可以调

用的最多工人数。

我们必须注意分配给各工序的工人总数应少于或等于可能得到的人员数，如果超过，必须采取一定的措施。整个工程的总人员最好是尽可能安排得均匀些，这可以用推迟一些工序的开工时间来减少那些用人很多的工序的工人数来达到。例如，若当工序(2～5)完工后，工序(5～7)的开工时间推迟 3 天，则第 4.5 天之后，工序(3～6)的工人数可以减至 2，第 11 天后可以减至一个工人。所以，8 个工人就足以使整个工程在 19 天内完成，如表 6.3 所示。当然，有时某一工序必须有一个最少人数来干，故对人员安排上的改变应予以留意。

表 6.3

人\日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)
2	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)
3	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(1～4)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)
4						(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(4～6)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)
5	(1～2)	(1～2)	(1～2)											(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)	(6～7)
6	(1～2)	(1～2)	(1～2)																
7				(2～5)	(2～5)	(2～5)	(2～5)	(2～5)											
8				(2～5)	(2～5)	(2～5)	(2～5)	(2～5)											
9												(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)
10												(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)	(5～7)
11	(1～3)	(1～3)																	
12			(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)							
13			(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)	(3～6)								
14			(3～6)	(3～6)	(3～6)														
总计	6	6	8	8	8	8	8	8	6	6	6	7¦6	6¦7	7	7	7	7	7	7

参 考 文 献

〔1〕华罗庚，统筹方法平话及补充，中国工业出版社，北京，1965.

〔2〕华罗庚，陈德泉，计雷等(编辑)，全国推广优选法成果汇编，卷Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，科学技术文献出版社，北京，1977.

〔3〕Kelley J.E.Jr.， and M.R.Walker.Critical Path Planning and Scheduling, Proc.of the Eastern Joint Computer Conf.， Dec.1959, 1–3.

英文版校订者注：一些补充参考文献如下。

〔4〕Elmaghraby S.E.Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models, Wiley, 1977.

〔5〕Moder J.J.， C.R.Phillips and E.W.Davis.Project Management with CPM.PERT and Precedence Diagramming, 3th ed.， Van Nostrand, 1983.

〔6〕Wiest J.D., and F.K. Levy. A Management Guide to PERT／CPM,Prentice–Hall,1977.

第七章　计划检查评审技术(PERT)

§7.1　引言

问题：假定一个工程有 n 道工序(或任务)，描述每道工序用三个时间参数，即“乐观时间”、“最可能时间”与“悲观时间”。每道工序所需的精确时间，并不假定已知。问如何估计整个工程工期的概率？

为了区别起见，第六章所讨论的问题称为肯定型问题，这里所说的问题则为非肯定型问题。若我们对工程的每道工序都很熟悉，从而我们可以用以往积累的资料，精确地估计每道工序所需的时间，则最好将问题作为肯定型问题来考虑。否则，若一项工程包含了一些用以前的实践无法估计所需时间的工序，则最好将问题作为非肯定型问题来考虑。

命 a、b 与 c 分别表示一个工序的乐观时间、最可能时间与悲观时间。则用

$$\frac{a+4c+b}{6}$$

来表示这一工序的“平均时间”(即均值)。若将一个工序的平均时间定义为工序的新的所需时间，则我们的问题归结为一个肯定型问题，从而 CPM 可以用来寻求工程的总工期 M。

但这里得到的工程工期 M，只是工程完工的一个可能日子。一个很自然的问题是如何估计工程在 M 天之内完成的概率？进而言之，对于给定 N，怎样去估计工程总工期少于或等于 N 的概率？

本章我们将介绍处理上述问题的方法，即所谓计划检查评审技术，或谓之 PERT 法。PERT 的前提是一系列统计假定，这些假定的可靠程度是值得研究的。但是，PERT 仍是一个好的可供普及的数学方法，因为

1)这个方法易为工人与管理人员掌握；

2)这个方法适用于有大量人员参与的大工程；

3)这个方法对于组织几个工业部门的协作是一个好的科学方法。

§7.2 概率的估计

今后我们用 t_0、t_m、t_p 与 t_e 分别表示一个任务的乐观时间、最可能时间、悲观时间与平均时间，此地 t_e 定义为

$$t_e=\frac{t_0+4t_m+t_p}{6}.$$

$t_0-t_m-t_p$ 标于表示任务的有向弧一侧，而 t_e 则标在有

向弧的另一侧，如图 7.1

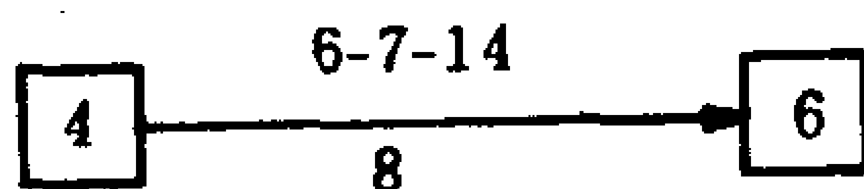


图 7.1

若把 t_e 作为任务所需的时间，则一个非肯定型的问题就转化为肯定型问题了，从而 CPM 可以用来寻求该工程的总工期 M，这时的 M 又叫做工程的平均工期。当然，这样得到的 M 只是工程完工的一个可能日子。现在我们来介绍一个估计工程在 N 天之内完工的概率 $p(N)$。

一个任务的方差定义为

$$\tau_e = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2,$$

工程的方差 σ^2 定义为 CP 上诸任务的 τ_e 值之和。则概率

$$P(M + x\sigma)$$

等于

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

其中 $\Phi(x)$ 的值由表 7.1 给出。由于

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

故 $\Phi(-x)$的值也可以从表 7.1 得到。

例 考虑由图 7.2 给出的问题。

作为一个肯定型问题，得 CP

表 7.1 正态分布表(分布函数)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	0.60	0.726	1.20	0.885	1.80	0.964	2.40	0.992
0.05	0.520	0.65	0.742	1.25	0.894	1.85	0.968	2.45	0.993
0.10	0.540	0.70	0.758	1.30	0.903	1.90	0.971	2.50	0.994
0.15	0.560	0.75	0.773	1.35	0.911	1.95	0.974	2.55	0.995
0.20	0.579	0.80	0.788	1.40	0.919	2.00	0.977	2.60	0.995
0.25	0.599	0.85	0.802	1.45	0.926	2.05	0.980	2.65	0.996
0.30	0.618	0.90	0.816	1.50	0.933	2.10	0.982	2.70	0.997
0.35	0.637	0.95	0.829	1.55	0.939	2.15	0.984	2.75	0.997
0.40	0.655	1.00	0.841	1.60	0.945	2.20	0.986	2.80	0.997
0.45	0.674	1.05	0.853	1.65	0.951	2.25	0.988	2.85	0.998
0.50	0.691	1.10	0.864	1.70	0.955	2.30	0.989	2.95	0.998
0.55	0.709	1.15	0.875	1.75	0.960	2.35	0.991	3.00	0.999

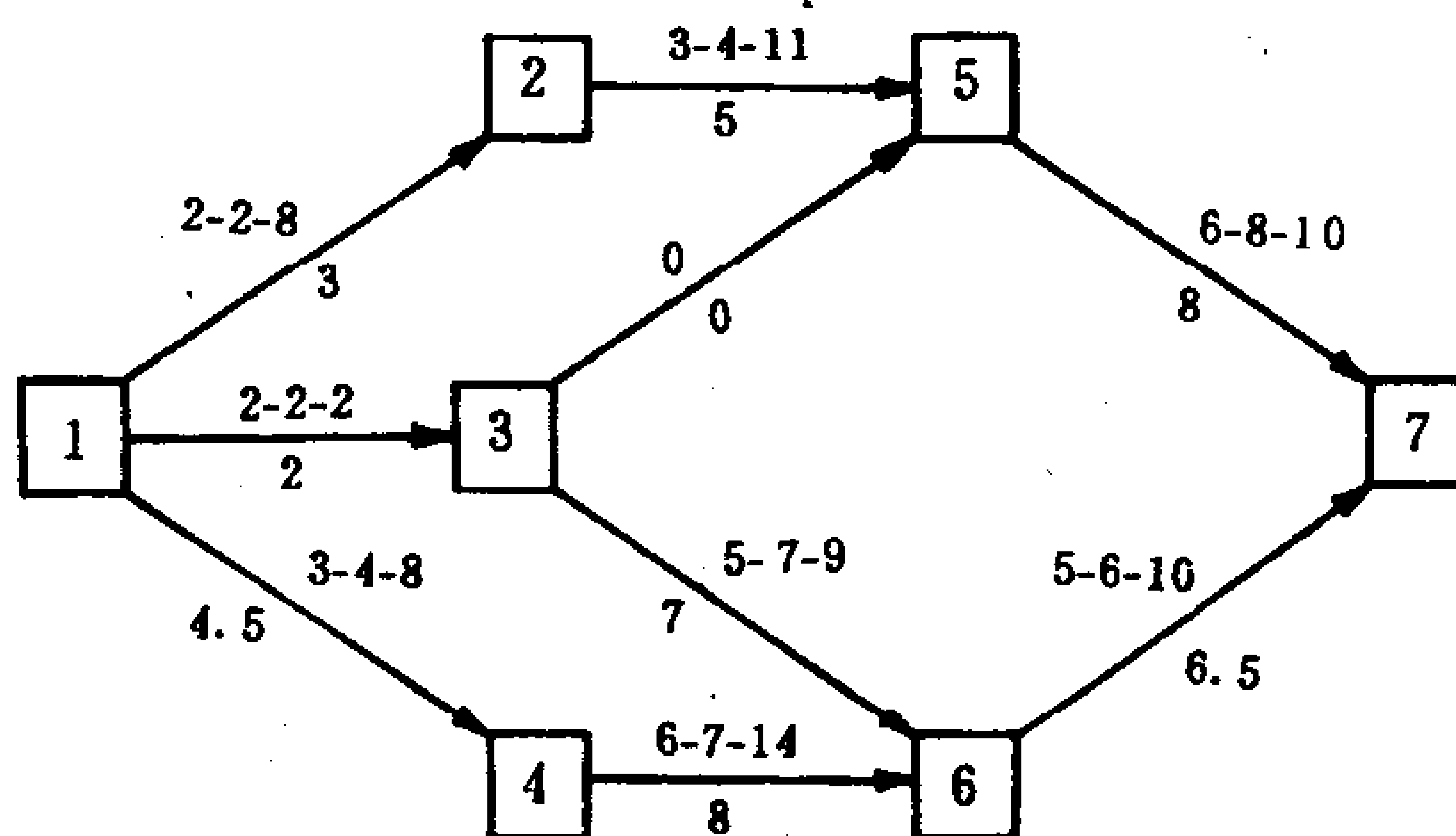


图 7.2



总工期为 $M=19$。CP 上每一道工序的平均时间与方差如表 7.2 所示。

表 7.2

工序	(1~4)	(4~6)	(6~7)	总和
均值	4.5	8	6.5	19
方差	$\left(\frac{8-3}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$	$\left(\frac{14-6}{6}\right)^2=\frac{64}{36}$	$\left(\frac{10-5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$	$\frac{114}{36}$

因此，工程工期的标准离差为

$$\sqrt{\frac{114}{36}}\approx 1.8.$$

由
$$19=19+1.8x,$$
得
$$x=0,$$
由表 7.1 可知 $p(19)=\Phi(0)=50\%.$

又由
$$21=19+1.8x,$$
得
$$x=\frac{2}{1.8}=1.11\cdots,$$
故由表 7.1 得

$$p(21)=\Phi(1.11\cdots)\approx 86\%.$$

§ 7.3 计算过程

求解 § 7.1 所述的问题，我们列下面两张表。第一张表包括下面的细则:

1) 第一列填写各工序的名称。

2) 第二列填写 t_o、t_m、t_p 与 t_e 值。

3) 把 t_e 作为每道工序所需的时间。用 CPM 算出每道工序的最早可能开工时间 T_E 与最迟必须开工时间 T_L，将它们

填入第三列。

4) 将各工序的时差填入第四列。把时差为零的有向弧连接起来，即得 CP 与工程的平均工期 M。

第二张表包括下面的细则:

5) CP 上各工序的名称填入第一列。

6) CP 上各工序的 t_o、t_p、$t_p - t_o$ 及 $(t_p - t_o)^2$ 依次填入以后各列。于是我们得到工程工期的标准离差 σ。

对于任意给定的 N，由 $M + x\sigma = N$

可得
$$x = \frac{N - M}{\sigma},$$

所以，由表 7.1 即得工程在 N 天之内完工的概率

$$p(N) = \Phi(x)。$$

例 考虑如图 7.3 所示的工程。

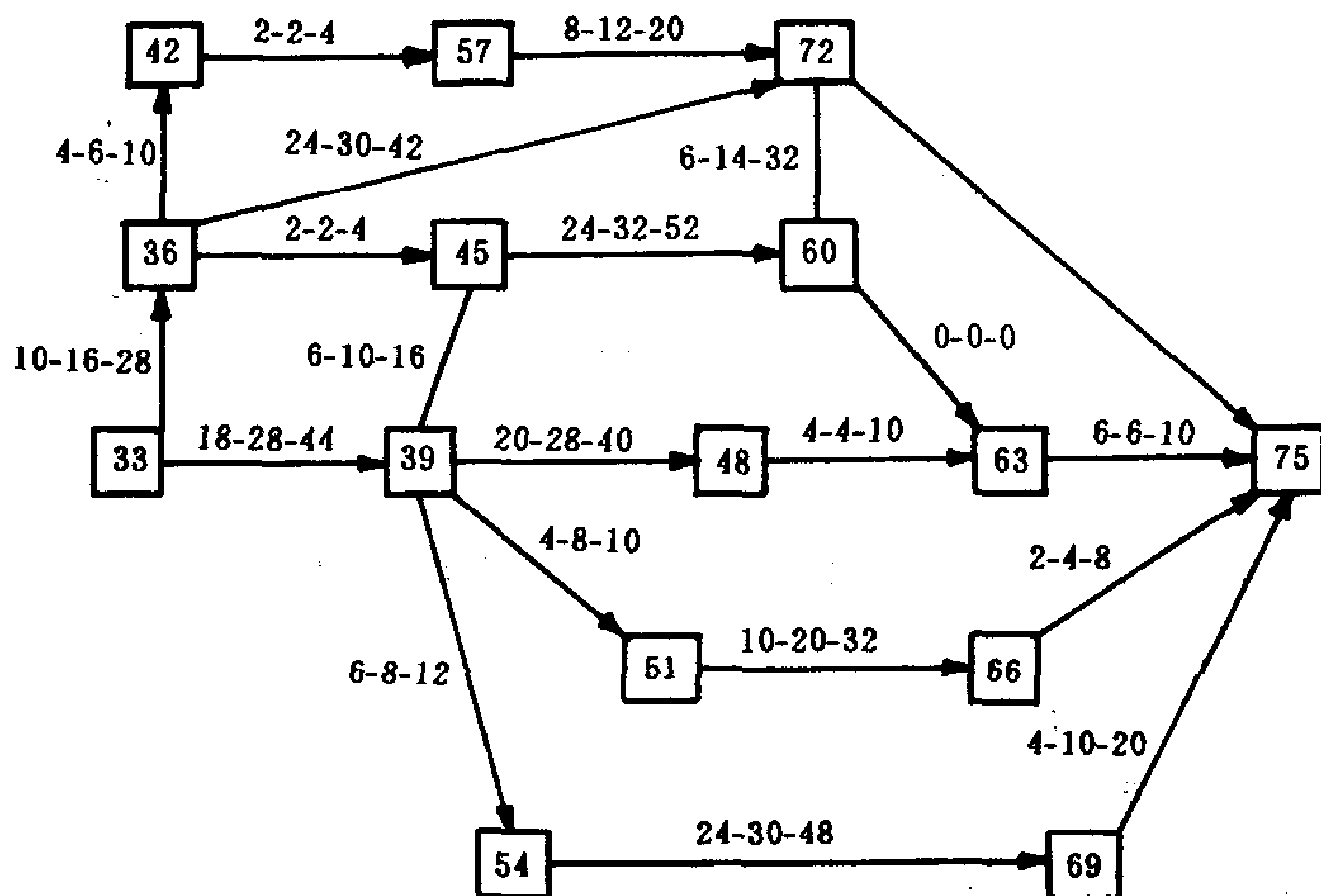


图 7.3

表 7.3

工 序	t_o	t_m	t_p	t_e	T_E	T_L	T_L-T_E
(33～36)	10	16	28	17.0	0	20.0	20.0
(33～39)	18	28	44	29.0	0	0	0
(36～42)	4	6	10	6.3	17.0	67.7	50.7
(36～45)	2	2	4	2.3	17.0	37.0	20.0
(36～72)	24	30	42	31.0	17.0	58.0	41.0
(39～45)	6	10	16	10.3	29.0	29.0	0
(39～48)	20	28	40	28.7	29.0	54.6	25.6
(39～51)	4	8	10	7.7	29.0	62.7	33.7
(39～54)	6	8	12	8.3	29.0	44.0	15.0
(42～57)	2	2	4	2.3	23.3	74.0	50.7
(45～60)	24	32	52	34.0	39.3	39.3	0
(48～63)	4	4	10	5.0	57.7	83.3	25.6
(51～66)	10	20	32	20.3	36.7	70.4	33.7
(54～69)	24	30	48	32.0	37.3	52.3	15.0
(57～72)	8	12	20	12.7	25.6	76.3	50.7
(60～63)	0	0	0	0	73.3	88.3	15.0
(60～72)	6	14	32	15.7	73.3	73.3	0
(63～75)	6	6	10	6.7	73.3	88.3	15.0
(66～75)	2	4	8	4.3	57.0	90.7	33.7
(69～75)	4	10	20	10.7	69.3	84.3	15.0
(72～75)	4	6	8	6.0	89.0	89.0	0
(75～75)	0	0	0	0	95.0	95.0	0

1)表 7.3 是第一张表。由表 7.3 我们立即得到 CP



及工程的平均工期 $M=95$。

2) 表 7.4 是第二张表，因此工程工期的标准离差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{2252}{36}}\approx\sqrt{62.5556}\approx 7.91.$$

3) 由 $95+7.91x=90$,

表 7.4

工 序	t_o	t_p	t_p-t_o	$(t_p-t_o)^2$
(33～39)	18	44	26	676
(39～45)	6	16	10	100
(45～60)	24	52	28	784
(60～72)	6	32	26	676
(72～75)	4	8	4	16

2252

得
$$x=\frac{-5}{7.91}\approx-0.63,$$
所以，由表 7.1 可知
$$p(90)\approx\Phi(-0.63)\approx 26\%。$$
4) 由 $95+7.91x=100$,

得
$$x=\frac{5}{7.91}\approx 0.63,$$
所以，由表 7.1 得
$$p(100)\approx\Phi(0.63)\approx 74\%。$$

§7.4 初等方法

和前面一样，我们将一个非肯定型问题，转化为肯定型问题，然后用 CPM 找出肯定型问题的 CP。假定 CP 是由 n 道工序 m_1、m_2、…、m_n 构成。用 $t_o^{(i)}$、$t_m^{(i)}$ 与 $t_p^{(i)}$ 分别表示工序 m_i 所对应的 t_o、t_m 与 t_p。现在来计算对应的概

率 $p(N)$。

命 $t_o^{(i)}$、$t_m^{(i)}$ 与 $t_p^{(i)}$ 的加权分别为 1、4 与 1. 考虑对 CP 的 3^n 个可能工期 d

$$d=\sum_{i=1}^{n}d_i,$$

此处 d_i 表示 $t_o^{(i)}$、$t_m^{(i)}$ 与 $t_p^{(i)}$ 中间的一个。d 的加权 $\sigma(d)$ 定义为 d_i 的加权之积。注意所有 3^n 个可能的 d 的加权之和等于 6^n。现在定义工程在 N 天内完工的概率为所有 $\leqslant N$ 的 CP 工期的加权和与所有 CP 工期的加权和之比，即

$$p(N)=\frac{\sum_{d\leqslant N}\sigma(d)}{6^n}.$$

例 考虑图 7.2 给出的问题。求 $p(21)$?

作为一个肯定型问题，CP 包含工序 (1～4)、(4～6) 与 (6～7)，它们分别记为 m_1、m_2 与 m_3。对应的 t_o、t_m 与 t_p 由表 7.5 给出。

表 7.5

工 序	t_o	t_m	t_p
m_1	3	4	8
m_2	6	7	14
m_3	5	6	10

由于 21 大于工程的平均工期 M，所以最好先算出工程至少要 22 天才能完工的概率 q，再用

$$p(21)=1-q.$$

大于或等于 22 的 CP 工期如下:

$$t_o^{(1)}+t_p^{(2)}+t_o^{(3)}=22,\qquad t_p^{(1)}+t_o^{(2)}+t_p^{(3)}=24,$$
$$t_m^{(1)}+t_p^{(2)}+t_o^{(3)}=23,\qquad t_p^{(1)}+t_m^{(2)}+t_p^{(3)}=25,$$
$$t_p^{(1)}+t_p^{(2)}+t_o^{(3)}=27,\qquad t_o^{(1)}+t_p^{(2)}+t_p^{(3)}=27,$$
$$t_o^{(1)}+t_p^{(2)}+t_m^{(3)}=23,\qquad t_m^{(1)}+t_p^{(2)}+t_p^{(3)}=28,$$
$$t_m^{(1)}+t_p^{(2)}+t_m^{(3)}=24,\qquad t_p^{(1)}+t_p^{(2)}+t_p^{(3)}=32,$$
$$t_p^{(1)}+t_p^{(2)}+t_m^{(3)}=28.$$

它们的加权分别为 1、4、1、4、16、4、1、4、1、4 与 1，其和为 41，所以

$$q=\frac{41}{216}\approx 19\%,$$

从而

$$p(21)\approx 1-19\%=81\%.$$

§ 7.5 注 记

PERT 的前提是一系列统计假定，即 CP 上每道工序的工期是一个区间 (t_o, t_p) 上服从 Beta 分布的随机变数，其中值与方差为

$$t_e=\frac{t_o+4t_m+t_p}{6}$$

与

$$\tau_e=\left(\frac{t_p-t_o}{6}\right)^2,$$

而工程的总工期是一个渐近地服从正态分布的随机变数，其中

值为 $M(=\sum t_e)$，标准离差为 $\sigma(=\sqrt{\sum \tau_e})$。虽然后面的假定可以当成中心极限定理 (CLT)(A.M.Ljapunoff 定理) 的结论，但如何去验证 CLT 中的前提条件仍是值得探讨的问题。

在推广 PERT 时，工序的平均时间与方差的含义，我们解释如下。

t_m 的概率假定是 t_o 概率的一倍，故

$$\frac{t_o + 2t_m}{3}$$

算作工序在区间 (t_o, t_m) 上的平均工期。同理，用

$$\frac{2t_m + t_p}{3}$$

算作工序在区间 (t_m, t_p) 上的平均工期。因此，工序的平均时间与方差可以分别取为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t_o + 2t_m}{3} + \frac{2t_m + t_p}{3}\right) = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6}$$

与

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{t_o + 4t_m + t_p}{6} - \frac{t_o + 2t_m}{3}\right)^2 + \left(\frac{t_o + 4t_m + t_p}{6} - \frac{2t_m + t_p}{3}\right)^2\right) = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2.$$

初等方法中唯一的假定是 t_o、t_m 与 t_p 的加权分别为 1、4 与 1，但这个方法所需的计算比较冗长。更准确地说，这一方法所需的初等计算次数是指数级的。

参考文献

〔1〕 Booz, Allen and Hamilton.Project PERT.Phase Ⅱ, Special Projects Office, Bureau of Naval Weapons, Dept.of Navy, Washington D.C., Nov.1958.

〔2〕 华罗庚，统筹方法平话及补充，中国工业出版社，北京，1965.

〔3〕 华罗庚，陈德泉，计雷等(编辑)，全国推广优选法成果汇编，卷Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，科学技术文献出版社，北京，1977.

英文版校订者注：一些补充参考文献如下。

〔4〕 Elmaghraby, S.E.Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models, Wiley, 1977.

〔5〕 Moder J.J., C.R.Phillips and E.W.Davis.Project Management with CPM.PERT and Precedence Diagramming, 3th ed., Van Nostrand, 1983.

〔6〕 Wiest J.D.and F.K.Levy.A Management Guide to PERT / CPM, Prentice–Hall, 1977.

第八章　机器排序

§8.1　引言

除了使一个过程的总等待时间最少的排序问题外，我们在工厂中碰到的其它序贯分析方面的问题还有机器排序问题，即

问题　有 n 个零件 X_1，X_2，…，X_n，需要在 s 台机床 A_1，A_2，…，A_s 上加工，这里每个零件按次序 A_1，A_2，…，A_s，在每台机床上连续加工。每一零件在每台机床上的加工时间（用小时为单位）是已知的。问零件如何排序可使第一个零件开始加工到最后一个零件加工完的时间最少？

当 $s=2$ 时，这个问题已由 S.M.Johnson 解决，但当 $s>2$ 时，我们只有一些试算方法（直接推断法），能够得出稍微满意的解答．因此在本章中，我们仅讨论 $s=2$ 的情况。

§8.2 两台机床问题

两台机床分别记为 A 与 B。命 a_i 与 b_i 分别表示零件 X_i 在 A 与 B 上所需的加工时间，其中 a_i 与 b_i 可以取值零。则 Johnson 法则可以表述如下：

若 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n 中的最小数出现在"a"中，比如 a_i，则零件 X_i 安排在最早加工。反之，若出现在"b"中，比如 b_j，则 X_j 安排在最后加工。若有多个相等的最小数，则按上法，任取一个安排。去掉安排后的零件，再继续重复上述步骤。

例 假定有五个零件 X_1，…，X_5，需要依次在机床 A 与 B 上加工，它们所需的加工时间由表 8.1 给出。

表 8.1

加工时间

零件＼机床	A	B
X_1	1	5
X_2	8	3
X_3	3	9
X_4	4	2
X_5	7	5
	23	24

首先，若零件按次序 $X_1X_2X_3X_4X_5$ 加工，我们来计算这五个零件所需的总耗时间。命零件 X_1 在 A 上的开始时间为 $t=0$，则它在机床 A 上的终结时间为 $t=1$，这也是 X_1 在机床 B 上的开始时间。X_1 在 B 上的终结时间为 $t=1+5=6$。X_2 在 A 上的开始时间为 $t=1$，而其终结时间为 $t=1+8=9$。因此，X_2 在 B 上的开始时间与终结时间分别为 $t=\text{MAX}\{6,\ 9\}=9$ 与

$t=12$，等等。结果如表 8.2 所示。

表 8.2

机 床

	A		B	
零件	开始	终结	开始	终结
X_1	0	1	1	6
X_2	1	9	9	12
X_3	9	12	12	21
X_4	12	16	21	23
X_5	16	23	23	28

最后一个零件在 B 上的终结时间的一倍称为该加工顺序的**总耗时间**。所有零件在两台机床上的加工时间之和称为**机器时间**。总耗时间与机器时间之差称为**空闲时间**。因此，在这个例子中，对加工顺序 $X_1X_2X_3X_4X_5$ 的总耗时间、机器时间与空闲时间分别为 $2\times28=56$、$23+24=47$ 与 9。

现在我们按照 Johnson 法则安排加工顺序。表 8.1 中的最小数是 1，所以零件 X_1 安排在最先加工。同理，X_4 安排在最后加工。剩下零件的最小加工时间是 3，即 X_3 在机床 A 上的加工时间与 X_2 在 B 上的加工时间。我们将 X_3 安排在 X_1 后面加工。照此做下去，我们得到加工顺序为 $X_1X_3X_5X_2X_4$。结果如表 8.3 所示。这个顺序的总耗时间为 50，而空闲时间为 3。这说明加工顺序 $X_1X_3X_5X_2X_4$ 比 $X_1X_2X_3X_4X_5$ 好。我们得出下面的结论：

定理 8.1 具有最小总耗时间的零件加工顺序可以由

Johnson 法则得到。

表 8.3

运用 Johnson 法则的加工程序

机　床

	A		B	
零件	开始	终结	开始	终结
X_1	0	1	1	6
X_3	1	4	6	15
X_5	4	11	15	20
X_2	11	19	20	23
X_4	19	23	23	25

§8.3　一条引理

引理 8.1　假定有三个零件 X_0、X_1 与 X_2，分别先在机床 A 上加工，然后在机床 B 上加工，所需的加工时间分别为 0、a_1、a_2 与 M、b_1、b_2。假设 X_0 先安排加工，则按 Johnson 法则安排 X_1 与 X_2 的加工顺序有最小的总耗时间。

证　命加工顺序 $X_0X_1X_2$ 与 $X_0X_2X_1$ 的总耗时间分别为 $2f$ 与 $2g$。则

$$f = \text{MAX}\left\{\text{MAX}\{M, \ a_1\} + b_1, \ a_1 + a_2\right\} + b_2$$

与
$$g = \text{MAX}\left\{\text{MAX}\{M, \ a_2\} + b_2, \ a_1 + a_2\right\} + b_1.$$

1) 假定 $a_1 \leqslant \mathrm{MIN}\{a_2, b_1, b_2\}$。若 $M < a_1$，则

$$f = \mathrm{MAX}\{a_1 + b_1, a_1 + a_2\} + b_2, \quad g = a_2 + b_1 + b_2,$$

若$a_1 \leqslant M \leqslant a_2$，则

$$f = \mathrm{MAX}\{M + b_1, a_1 + a_2\} + b_2, \quad g = a_2 + b_1 + b_2,$$

若$M > a_2$，则

$$f = g = M + b_1 + b_2,$$

因此，
$$f \leqslant g。$$

这就是说，加工顺序 $X_0X_1X_2$ 的总耗时间不比加工顺序 $X_0X_2X_1$ 的多。同理，若 $a_2 \leqslant \mathrm{MIN}\{a_1, b_1, b_2\}$，则加工顺序 $X_0X_2X_1$ 的总耗时间不比 $X_0X_1X_2$ 的多。

2) 假定 $b_1 \leqslant \mathrm{MIN}\{a_1, a_2, b_2\}$。若 $M < a_1$，则

$$f = a_1 + a_2 + b_2,$$

$$g = \mathrm{MAX}\left\{\mathrm{MAX}\{M, a_2\} + b_2, a_1 + a_2\right\} + b_1,$$

若$M < a_2$，则

$$f = a_1 + a_2 + b_2, \quad g = \mathrm{MAX}\{a_2 + b_2, a_1 + a_2\} + b_1,$$

若$M \geqslant \mathrm{MAX}\{a_1, a_2\}$，则

$$f = \mathrm{MAX}\{M + b_1, a_1 + a_2\} + b_2,$$
$$g = \mathrm{MAX}\{M + b_2, a_1 + a_2\} + b_1,$$

因此
$$f \geqslant g。$$

这就是说，加工顺序 $X_0X_2X_1$ 的总耗时间不比 $X_0X_1X_2$ 的多。同理，若 $b_2 \leqslant \mathrm{MIN}\{a_1, a_2, b_1\}$，则加工顺序 $X_0X_1X_2$ 的总耗时间不比 $X_0X_2X_1$ 的多。引理证完。 □

§ 8.4 定理8.1的证明

当 $n=2$ 时，则增加一个虚拟零件 X_0，安排最先加工，其加工时间为 0、M。若取 $M=0$，则由引理 8.1 即得定理。假定 $n\geqslant 3$，若零件个数不超过 $n-1$ 时，定理成立。对于 n 个零件 X_1，…，X_n 的任意加工顺序 σ，只要证明存在服从 Johnson 法则的一个加工顺序，其总耗时间不超过 σ 的总耗时间即可。

不失一般性，我们可以假定 σ 的次序是 X_1，…，X_n。首先，我们用 Johnson 法则来安排前 $n-1$ 个零件 X_1，…，X_{n-1} 的加工次序，得到 $X_{i_1}\cdots X_{i_{n-1}}$. 则由归纳法可知 $X_{i_1}\cdots X_{i_{n-1}}X_n$ 的总耗时间不比 σ 的多。

命$2N$为加工顺序$X_{i_1}\cdots X_{i_{n-2}}$的总耗时间。

命 $$M=N-a_{i_1}-\cdots-a_{i_{n-2}}.$$

又命虚拟零件 X_0 的加工时间为 0、M。按 Johnson 法则安排 $X_{i_{n-1}}$ 与 X_n 的加工顺序得 $X_{j_{n-1}}X_{j_n}$. 则由引理 8.1 可知 $X_0X_{j_{n-1}}X_{j_n}$ 的总耗时间不比 $X_0X_{j_{n-1}}X_n$ 的多。也就是说，$X_{i_1}\cdots X_{i_{n-2}}X_{j_{n-1}}X_{j_n}$ 的总耗时间不比 $X_{i_1}\cdots X_{i_{n-1}}X_n$ 的多，从而不比 σ 的总耗时间多。按照 Johnson 法则安排零件 X_{i_1}，…，$X_{i_{n-2}}$，$X_{j_{n-1}}$ 的加工顺序，得 $X_{k_1}\cdots X_{k_{n-1}}$. 则由归纳法可知 $X_{k_1}\cdots X_{k_{n-1}}X_{j_n}$ 的总耗时间不比 $X_{i_1}\cdots X_{i_{n-2}}X_{j_{n-1}}X_{j_n}$ 的多，从而也不比 σ 的总耗时间多。由于加工顺序 $X_{k_1}\cdots X_{k_{n-1}}X_{j_n}$ 是符合 Johnson 法则的，定理证完。 □

附记 n 个零件在机床 A 上总是连续加工的，但是在机

床 B 上常有很多间隙时间。命 $2N$ 为一个加工顺序的总耗时间。命 $M=N-\sum_{i=1}^{n} b_i$. 则若第一个零件在 B 上的开始时间定义为 $t=M$，诸零件在 B 上的加工也是连续进行的。因此，在时间 $t=M$ 之前，机床 B 上可以安排一些其它工作。

参 考 文 献

〔1〕 Johnson, S.M.Optimal Two and Three Stage Production Schedules with Setup Time Included, Naval Reasearch Logistics Quarterly, 1, 1954, 61–68.

〔2〕 吴方，关于两台机床的Johnson法则的若干注记，1981，未发表。

〔3〕 越民义与韩继业，排列问题中的一些数学问题，数学的实践与认识，3，1976，62–77。

英文版校订者注：本章中的排序问题，也叫做流水作业线，如本章所述，可以很快求解。对许多排序问题来讲，已经知道尚无多项式时间算法可以决定一个最佳的加工顺序，这些问题即 NP——难点。排序问题有着大量文献，其中许多是处理计算复杂性问题与试算算法的。下面给出一些补充参考文献，其中的第二篇文献〔5〕是包含了大量文献提要的综合论述。

〔4〕 Bellman, R., A.O.Esogbue and I. Nabeshima. Mathematical Aspects of Scheduling and Applications. Pergamon Press, 1982.

〔5〕 Błażewicz, J. Selected Jopics in Scheduling Theory. 1–60. In Martello, S., G. Laporte, M.Minoux and C.Ribeiro, Survevs in Combinatorial Optimization, Annals of Discrete Mathematics, 31, North Holland, 1987.

第九章　运输问题（图上作业法）

§9.1　引言

1958年，我们开始在我国的工业部门普及数学方法的工作。他们向我们提出的第一个问题就是下面的运输问题。假定我们希望作出一个关于同一种物资的运输计划，例如在铁路上运输小麦的计划。假定有 m 个产地 A_1，A_2，…，A_m，各产 a_1，a_2，…，a_m（比如以吨为单位），n 个销地 B_1，B_2，…，B_n，各需 b_1，b_2，…，b_n（吨）。各产地的产量总和与各销地的销量总和假定相等，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

假定 A_i 与 B_j 之间的距离为 c_{ij}（公里），A_i 运往 B_j 的物资为 x_{ij}（吨）。则总运价（以吨—公里为单位）作为运输物资的

矢量$\bar{x}$的函数为

$$f(\bar{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

假设诸a_i、b_j、c_{ij}与x_{ij}都取整数。我们的问题是如何选取x_{ij} $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$，使$f(\bar{x})$达到极小?

附记 若c_{ij}表示由A_i运一吨物资到B_j所需的运费(以人民币“元”为单位)，则$f(\bar{x})$就表示以元为单位的总运价。

这是熟知的线性规划中的 Hitchcock 与 Kantorowitch 运输问题，而且可以用下一章中将讨论的单纯形方法求解。我国运输部门负责制订铁路粮食调运计划的工作人员，根据他们多年的工作经验，独立地提出了上述问题，并给出了一个借助于一张地图求解这个问题的方法。现在我们举一个例子来说明他们的方法。

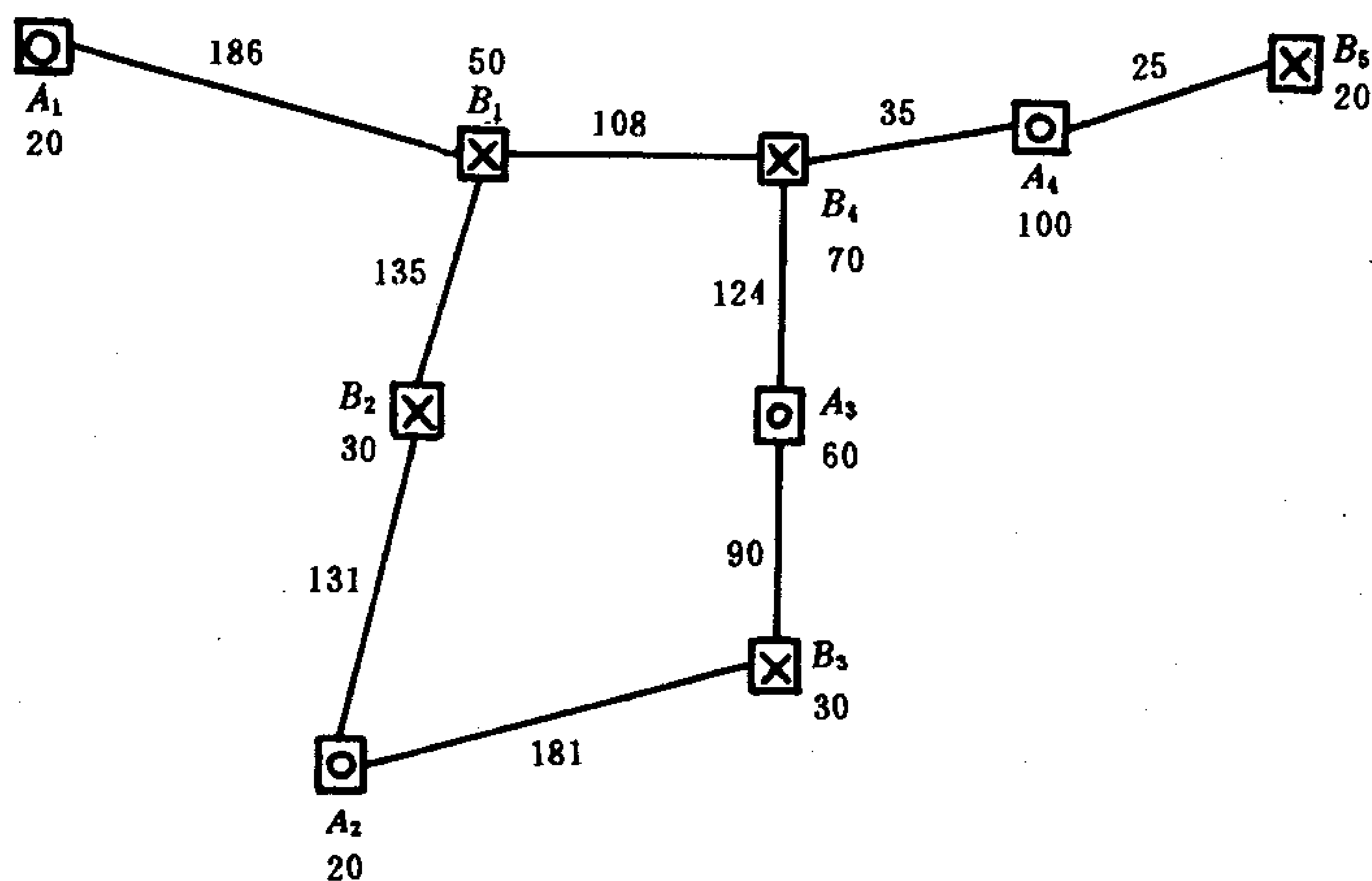


图 9.1

假定有四个产地A_1、A_2、A_3、A_4，各产20、20、60、100吨，有五个销地B_1、B_2、B_3、B_4、B_5，各需50、30、30、70、20吨。产地与销地的地理位置画在图9.1上。产地用符号[0]表示，销地用符号[×]表示。产地与销地旁边的数字分别表示产量与销量。在两个城镇连线旁边的数字是它们之间的距离。

对于象表9.1那样任意给出的运输分配方案，可以画一张地图来表示它。假定有m吨物资由A运往B，则沿表示铁路的由A到B的线段旁画一箭头矢量，将流量m写在

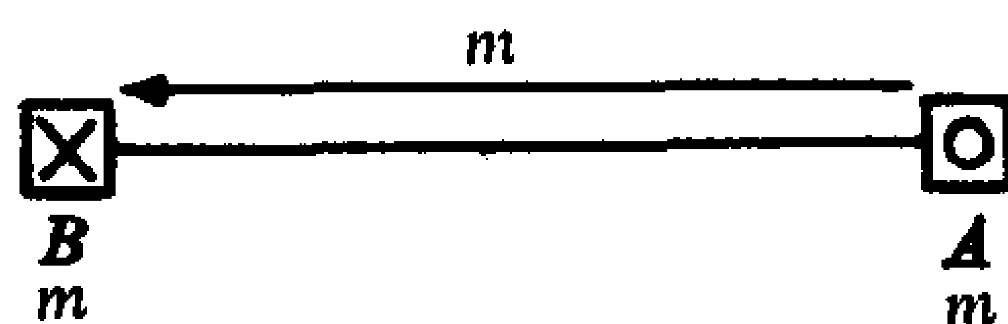


图 9.2

表 9.1

运输分配方案

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1		20				20
A_2	20					20
A_3		10	30		20	60
A_4	30			70		100
销量	50	30	30	70	20	

箭头矢量旁边，如图9.2。如果沿一条线段在相同的方向多于一根箭头矢量，则只要画一根箭头矢量，将物资的总流量标上，如图9.3所示。当所有的线段都照此做了以后，得到的对应于运输分配方案的总成的地图，称为运输分配方案的**流向**

图。例如，图 9.4 即表 9.1 所给出的运输分配方案的流向图。显然，有相同流向图的运输分配方案所需的运价 $f(\bar{x})$ 是相等的。



图 9.3



图 9.4

如果在一线段上出现相反方向的两个箭头矢量，则称为**对流矢量**。例如，图 9.4 中的 B_1B_2 与 A_4B_4 有对流矢量。若一张流向图上有对流矢量，则它对应的运输分配方案必定不是

最优的。在这种情况下，设法将流向图中的对流去掉，即可得

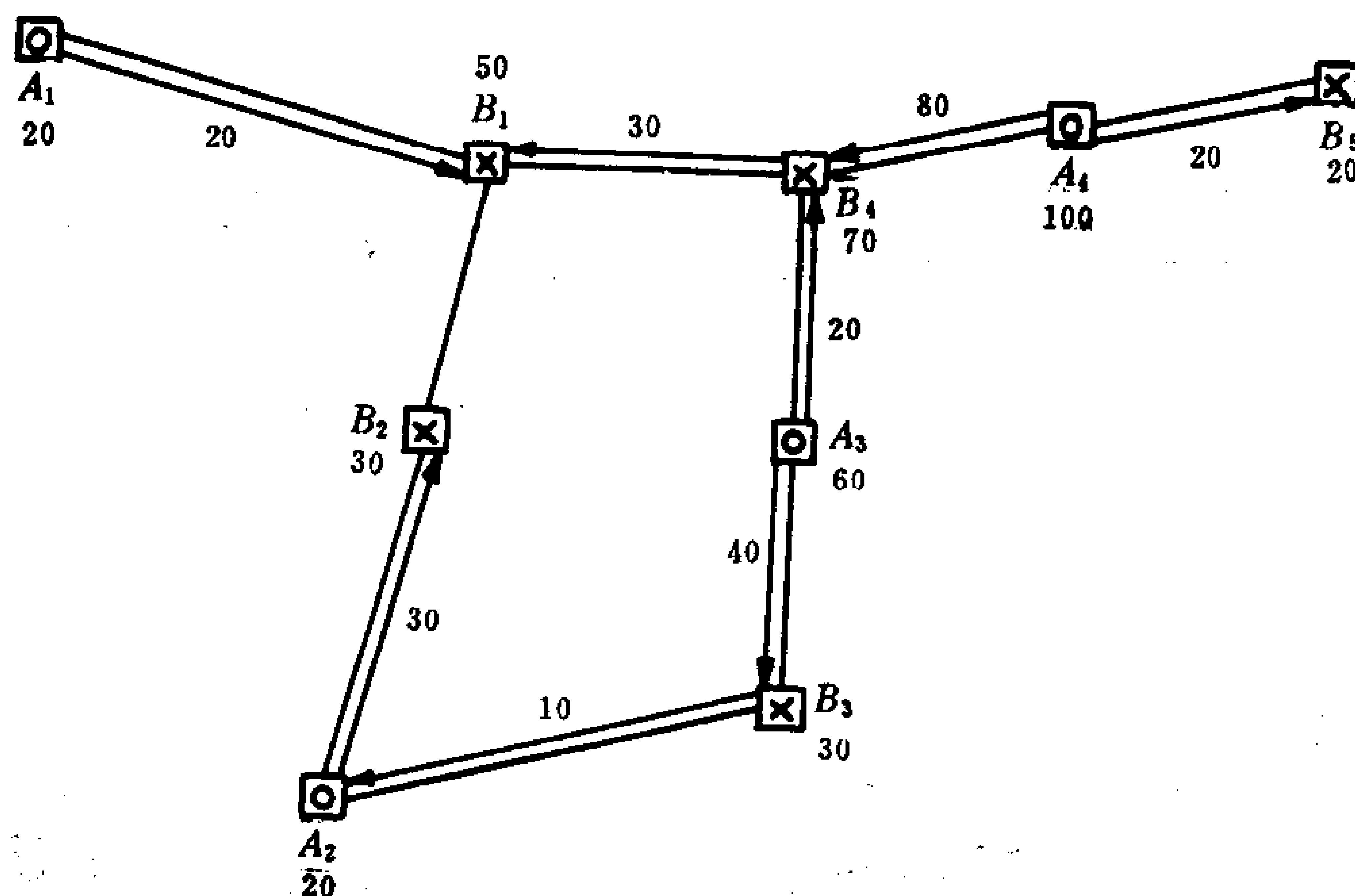


图 9.5

到更好的运输分配方案。例如，将图 9.4 变为图 9.5，图 9.5 对应的运输分配方案由表 9.2 给出。由表 9.1 与表 9.2 给出的运

表 9.2

没有对流的运输分配方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	20					20
A_2		20				20
A_3		10	30	20		60
A_4	30			50	20	100
销量	50	30	30	70	20	

输分配方案的运费之差，等于图 9.4 中有对流的线段上浪费的运价之和，即

$$2(135\times20+35\times20)=6800\ (\text{吨—公里})。$$

在流向图中自己不相交的闭路称为一个**圈**。例如，$B_1B_2A_2B_3A_3B_4B_1$ 即为图 9.1 中的一个圈。现在我们来考虑没有对流的一个圈 C，C 上沿逆时针方向的箭头矢量，称为**正向箭头矢量**，而顺时针方向的箭头矢量叫做**负向箭头矢量**。正向箭头矢量位于圈之外，而负向箭头矢量则位于圈之内。C 的总长记为 $l(C)$，C 上正向箭头矢量的总长记为 $l^+(C)$，负向箭头矢量的总长记为 $l^-(C)$。若不等式

$$l^+(C)\leqslant\frac{1}{2}l(C)\ \text{与}\ l^-(C)\leqslant\frac{1}{2}l(C)$$

中有一个不满足，则圈叫做**非正则**的。可以证明，若流向图中出现非正则圈，则它所对应的运输分配方案必定不是最优的。在这种情况下，需将流向图中非正则圈去掉，以得到更好的运输分配方案。例如图 9.5 的流向图中有一个长度为 769 公里的圈 $B_1B_2A_2B_3A_3B_4B_1$，其中负向箭头矢量的总长为 402 公里，超过了圈长之半，所以，这是一个非正则圈。这时流向图应加以改变，使非正则圈不再出现。例如，延长图 9.5 中的正向箭头矢量，缩短它的负向箭头矢量，使图 9.5 改变为图 9.6。图 9.6 所对应的运输分配方案如表 9.3 所示。表 9.2 与表 9.3 给出的运输分配方案的运价之差，等于图 9.5 中非正则圈上浪费的运价，即

$$10(131+181+90)-10(124+108+135)=350(\text{吨—公里})。$$

我们有下面关于最优运输分配方案，即具有最少运价方案的判别法则。

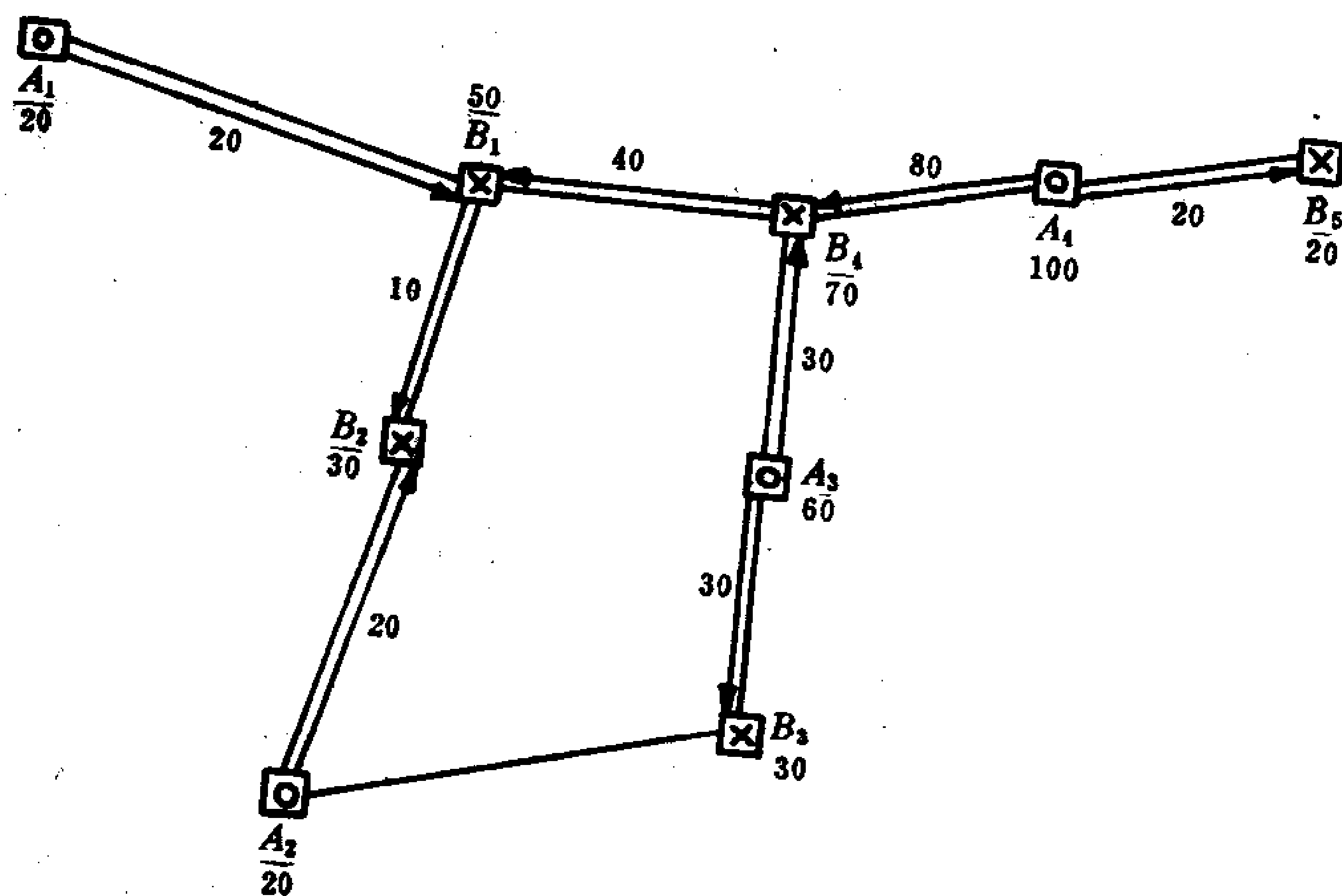


图 9.6

表 9.3

没有非正则圈的运输分配方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	10	10				20
A_2		20				20
A_3			30	30		60
A_4	40			40	20	100
销量	50	30	30	70	20	

定理 9.1　一个运输分配方案是最优方案的充分且必要条件是它的流向图中没有对流矢量与非正则圈。

这是从 50 年代以来，在我国运输部门中常用的方法，他们称之为运输问题的“图上作业法”。他们要求我们给他们的法则一个数学证明。万哲先及桂湘云与许国志独立地给出了证明[1]。当流向图上产地、销地或圈的个数较多时，这个方法显然不方便。在这种情况下，用熟知的单纯形方法更为方便，特别是单纯形方法比较容易编成计算机程序。所以，在 1958 年，我们也向他们介绍了单纯形方法。

附记 1) 地图上的支线可以用下面的方法去掉。把支线上的产量与销量相抵后集中于支线与圈的交点处，例如，在图 9.1 中，支线$B_4A_4B_5$可以取消，而将B_4变成有净产量为 10 吨的产地；支线A_1B_1也可以取消，而将B_1变成净销量为 30 吨的销地。于是，我们得到一张没有支线的地图(见图 9.7)。

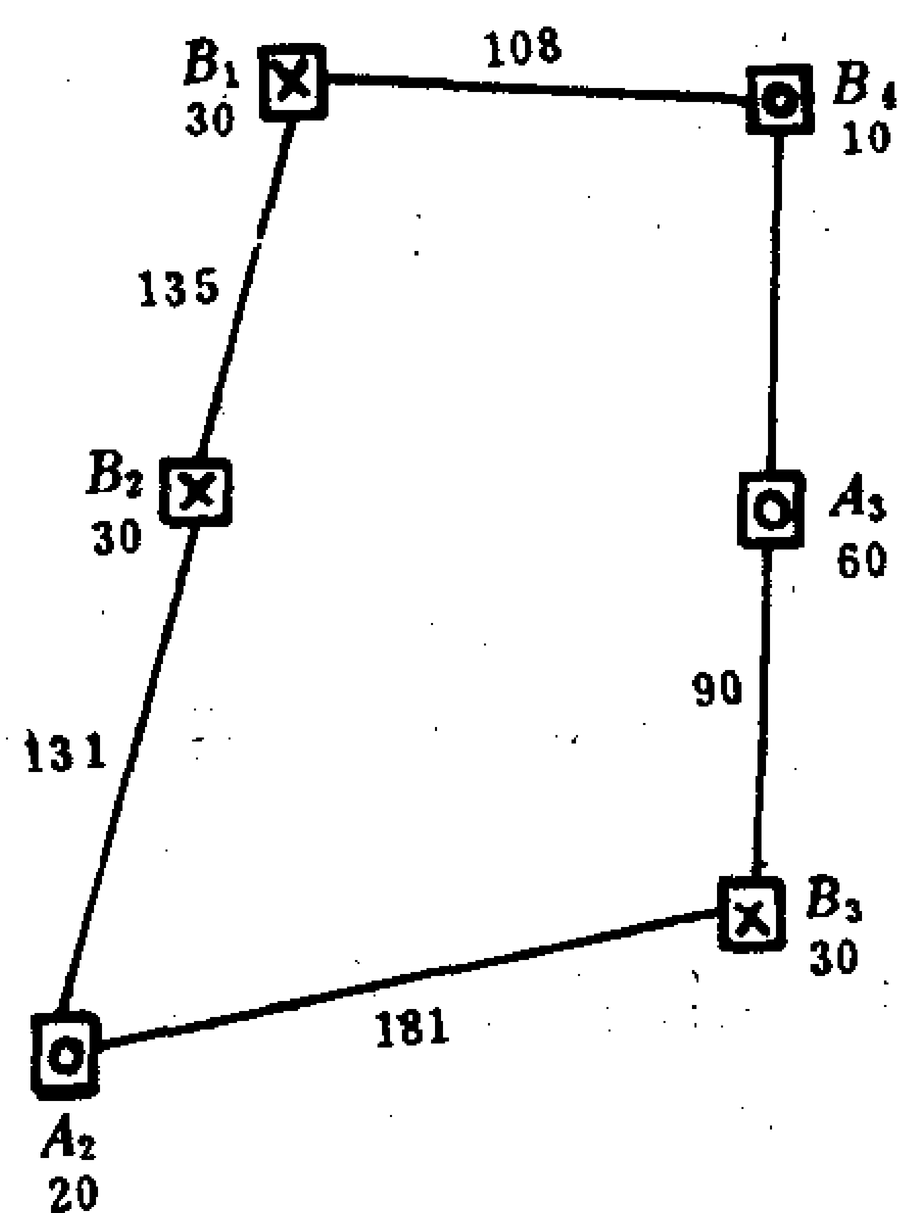


图 9.7

2) 管梅谷与李志杰都证明过，在某种情况下，定理 9.1 中需验证的圈的个数可以减少。

§ 9.2 一个圈

显然，最优运输分配方案所对应的流向图是没有对流矢量的，因此，我们仅考虑没有对流的流向图。我们还假定流向图

仅由若干个圈构成，即没有支线。若流向图中不含有非正则圈，则称为**正则流向图**，反之，称为非正则流向图。

本节，我们仅考虑流向图是由一个圈构成的情况。为简单计，我们假定每一销点的销量为 1 吨。事实上，若一销点的销量为 m 吨，则我们可以设想将这一销点变为 m 个销点，它们都位于原来的销点处，其中任意两销点间的距离均为零，每个销点的销量都是 1 吨。

定理 9.1 的证明 （一个圈的情形）

1）假定有一个由一个非正则流向图 C 构成的运输分配方案。不失一般性，假定

$$l^{+}(C)>\frac{1}{2}l(C). \tag{9.1}$$

我们可以画一个新流向图 C'，C' 与 C 的差别在于 C 中每一个正向箭头矢量的最大路程的终点的指向，现在由 C' 中的负向箭头矢量来代替，同时，如同在 C 中那样，在 C' 中其它的销地将用相同的产地来代替。亦即 C 中沿有正向箭头矢量的线段的流量减少 1 的同时，C 中沿有负向箭头矢量的线段的流量将增加 1，而 C 中流量零的线段，现在将为负向流量 1。这种由 C 至 C' 的变化过程称为正向箭头矢量缩回一站，或简称为流向图迭代。按 C 的正向箭头矢量将 1 吨物资运至每一最大路程的终点的运价等于 C 中的 $l^{+}(C)$，而在 C' 中销往相同销地的运价等于 $l(C)-l^{+}(C)$。由 (9.1) 式可知

$$l^{+}(C)>\frac{1}{2}l(C)>l(C)-l^{+}(C).$$

因此，流向图 C' 对应的运输分配方案比 C 对应的分配方案好。这证明了非正则图对应的运输分配方案一定不是最优的。因为一共只有有限多个有关的流向图（没有必要去考虑

所有线段都具有正向箭头矢量的流向图），所以，正则流向图一定是存在的。

2）其次，我们将证明具有正则流向图的运输分配方案都是最优的，即它们有同样的运价。注意，一旦各线段上的流量已知，则流向图就完全被确定。现在我们将所有的流向图按次序安排为

$$C_1, \cdots, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n,$$

其中 C_1 是没有负向箭头矢量的流向图，C_n 是没有正向箭头矢量的流向图，当 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 时，每一个 C_{i+1} 都是由 C_i 的正向箭头矢量缩回一站得来的。注意，所有的正则流向图都包括在这个流向图的序列中。命 C_s 为具有最小下标的正则流向图，C_t 为具有最大下标的正则流向图。则所有正则流向图为 C_s，C_{s+1}，…、C_t。若 $s=t$，则仅有一个正则流向图，所以定理成立。现在假定 $s<t$，只要证明任意两个相邻流向图 C_k 与 C_{k+1} （$s \leqslant k \leqslant t$）有相同的运价即可。在 C_{k+1} 中具有负向箭头矢量的线段，正是 C_k 中不具有正向箭头矢量的线段，于是

$$l^-(C_{k+1}) = l(C) - l^+(C_k).$$

由于

$$l^+(C_k) \leqslant \frac{1}{2} l(C)$$

与

$$l^-(C_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2} l(C),$$

所以，

$$l^+(C_k) = l^-(C_{k+1}) = \frac{1}{2} l(C).$$

证明了 C_k 与 C_{k+1} 有同样的运价，定理证毕。 □

§9.3 定理 9.1 的证明

与单圈情况类似，只要证明所有的正则流向图的运输分配方案有相同的运价即可。

命 F 与 F' 为两个不同的正则流向图，则显然它们对应不同的运输分配方案。在比较 F 与 F' 时，我们可以假定 F 与 F' 没有共同的箭头矢量。否则，我们可以从两个流向图中，用两个箭头矢量中较小的一个减去具有共同箭头矢量的线段上的流量。我们得到没有共同箭头矢量的流向图 G 与 G'。若 G 与 G' 对应的运价相等，则 F 与 F' 亦然。为了保证 G 与 G' 表示的流向图对应于某些运输问题，我们必须调整 F 与 F' 中具有共同箭头矢量的线段终点处的产量与销量。如果一线段上的箭头矢量减少 δ，假定起点是一个产地（或销地），则起点处的产量（或销量）必减少（或增加），在终点处必须作类似的调整。注意，原先是产地（或销地）的一个终点，现在，在新运输问题中成为销地（或产地）。若一线段在 G 中具有箭头矢量，则这线段在 F 中具有相同方向的箭头矢量，于是 G（与 G'）将是一个正则流向图。

命 N 表示 F 的所有产地的产量之和。若 $N=0$，则定理显然成立。假定 $N>0$ 及对于所有小于 N 的非负整数，定理成立。现在来证明定理对于 N 亦成立。让我们从一个产地 A_1 出发，假定在 F 中，至少有一吨物资由 A_1 运往销地 B_1，则在 F' 中，B_1 所需的至少一吨物资，将由另一产地 A_2（A_2 可能与 A_1 相同，但是经过另一条路径）。又在 F 中，A_2 供给另一销地 B_2。继续这一步骤，我们得到序列

$$A_1B_1A_2\cdots.$$

考虑第一个位置，它在这个序列中是循环的。不失一般性，我们假定第一个位置是销地 B_i，在 B_i 第一次与第二次出现之间，我们得到一条闭路 Z，

$$Z: B_iA_{i+1}\cdots B_{j-1}A_jB_i.$$

沿闭路 Z，物资由 F 按某个方向确定供销关系，而由 F'，物资则按相反方向确定供销关系。我们在 A_{i+1}，…，A_j 上减少一吨产量，在 B_i，…，B_{j-1} 上减少一吨销量，在 Z（包含 A_jB_i）的 A_sB_s 段的 F 的箭头矢量上减少一吨，在 Z 的 B_sA_{s+1} 段的 F' 的箭头矢量上减少一吨，得到两个新的流向图 F_1 与 F_1'。显然，F_1 与 F_1' 是没有共同箭头矢量的正则流向图，所有产地的总产量小于 F 与 F' 的。由引入的假设，F_1 与 F_1' 有相同的运价。

Z 可以分解为许多圈 C_1，…，C_M，在每一个圈 C_k 上，F 的箭头矢量均有相同方向，F' 的箭头矢量均有相反的方向。因为 F 与 F' 都是正则的，一吨物资在 C_k 上按 F 与 F' 供销，具有相同的运价，即均等于 $\frac{1}{2}l(C_k)$(见 §9.2)。因此，按 F(或 F')的总运价等于 F_1(或 F_1')总运价之和，即 $\frac{1}{2}l(Z)$。可知 F 与 F' 有相同的运价。定理证毕。 □

参考文献

〔1〕 Wan Zhe Xian（万哲先）. A Proof for a Graphic Method for Solving Transportation Problem, Scientia Sinica, 7, 1962, 889–894.

〔2〕 万哲先与王元，物资调运工作中的数学方法，科学出版社，北京，

1959.

〔3〕越民义，万哲先，王元等（编辑），线性规划的理论及应用，高等教育出版社，北京，1959.

英文版校订者注：关于运输问题、水路转船运输问题及最少运价网络流量问题的图上作业法的补充参考文献如下。

〔4〕Ford, L.R.Jr. and D.R.Fulkerson. Flows in Networks, Princeton University Press, 1962.

〔5〕Lawler, E.L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

第十章　运输问题（单纯形方法）

§10.1　引言

据我们所知，若一张地图上的产地、销地或圈的个数较多时，则图上作业法确实是不方便的，所以在1958年，我们乃将单纯形方法（即Dantzig方法）在我国运输部门的工作人员中作了介绍与普及。本章，我们将按照越民义、万哲先与王元在1958年写的讲义来介绍这个方法。前面一章所用的记号在这章仍将沿用。现在我们用下面的例子来阐述这个方法。

1）建立初始运输分配方案（**最小元素法**）。首先，我们做一张表（表10.1即我们的例子），它包括所有产地的产量与所有销地的销量，以及单位物资的运价 C_{ij}，运价的单位为元／吨。然后，在表中找出最小的单位物资运价 C_{ij}，并从 A_i 到 B_j 以最大的调配，再重复这一过程，直到所有的单元都发运完毕。由于表10.1中的最小数为1，它位于位置（2，1），于是 B_1 尽可能由 A_2 供应，因此，在第二张

表（它是相容于初始运输分配方案的一张表）上，将位置（2，1）内填上 3。由于 B_1 已得到全部供应，所以第二张中的位置（1，1）与（3，1）应该划去，如表 10.2 所示。在

表 10.1

运价、产量与销量

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

表 10.2

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1				
A_2	3			
A_3				

表 10.3

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1				
A_2	3		1	
A_3				

表 10.1 剩下的空格中，最小数是 2，位于位置（2，3），所以 B_3 尽量由 A_2 供应，即在表 10.2 的位置（2，3）内填上 1，由于 A_2 的产量已经销完，故将位置（2，2）与（2，4）划去，得表 10.3。继续这个过程，我们得到表 10.4 给出的初始运输分配方案。

附记 一般说来，当一个产地与一个销地的供销关系确定后，即划去这个产地与这个销地。因为假定总产量等于总销量，所以经过 $n+m-1$ 次确立产销关系后，即得到初始运输分配方案。在此要注意供销量可以是零。

表 10.4

初始运输分配方案

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	/	/	4	3	7
A_2	3	/	1	/	4
A_3	/	6	/	3	9
销量	3	6	5	6	

表 10.5

判别数

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	判别数
A_1			3	10	2
A_2	1		2		1
A_3		4		5	−3
判别数	0	7	1	8	

2）最优运输分配方案的判别法（**判别数方法**）。做一张新表，包含了对应于在初始运输分配方案表中有供销关系的位置上的运价，这些位置即(1，3)、(1，4)、(2，1)、(2，3)、(3，2)与(3，4)（见表10.5）。对每一行与每一列的判别数的选择，要使表10.5中的每一个表值都是它对应的行的判别数与对应的列的判别数之和。例如，将0放在B_1所在列的下面，则A_2所在行的右端必须放1，依此类推，B_3下面放1，A_1右端放2，B_4下面放8，A_3右端放-3，B_2下面放7。把表10.5的每一个空格内，分别填上它所对应的行与列的判别数之和，得到表10.6。将各运价C_{ij}（见表10.1）分别减去表10.6中对应的表值，得到表10.7。若判别表中的每一个数都是非负的，则对应的运输分配方案必为一个最优方案。否则，这个方案应该更换为一个更好的方案。

表 10.6

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	判别数
A_1	2	9	3	10	2
A_2	1	8	2	9	1
A_3	−3	4	−2	5	−3
判别数	0	7	1	8	

表 10.7

判别表

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	0	0
A_2	0	1	0	−1
A_3	10	0	12	0

3）**运输分配方案的迭代**。由于表 10.7 中位置（2，4）的表值是负的，表 10.4 给出的对应的运输分配方案需换成更好的一个。在表 10.4 中，我们过（2，4）画一条闭路 Z，其边均平行于“座标轴”，而其顶点除了有（2，4）外，均在含有表值的位置上，即

Z：（2，4)(1，4)(1，3)(2，3)(2，4)，如表 10.8 所示。从（2，4）开始，Z 的其余顶角标为 1、2、3 等。因

表 10.8

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

此，奇顶角为（1，4）与（2，3），而其它顶角为偶顶角。选择 Z 的奇顶角的表值的最小数，即位置（2，3）中的 1。新的运输分配方案将在（2，3）处为一空格。奇顶点的表值都减去 1，而偶顶点的表值都增加 1。得到一个新的运输分配方案，如表 10.9 所示。这个分配方案比初始分配方案节省的运价等于

$$(4\times3+1\times2+3\times10)-(5\times3+2\times10+1\times8)$$
$$=1\ (\text{元}).$$

表 10.10 给出了对应于表 10.9 的判别表。因为表 10.10 中每个表值都是非负的，故由表 10.9 给出的运输分配方案是最优的。

表 10.9

新的运输分配方案

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表 10.10

判别表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2	0	0
A_2	0	2	1	0
A_3	9	0	12	0

附记 1）任何具有 $m+n-1$ 个供销关系的运输分配方案，其对应的流向图中又无对流，即可以作单纯形方法的初始运输分配方案。在实际应用中，C_{ij} 只要取少数几位有效数字即可。

2）田克俊与徐中玲给上述方法编了一个电子计算机程序。

在以下诸节中，我们将给上述判别法一个严格的数学证明。

§ 10.2 消去变数与允许解

命 C_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$，$a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 与 b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 为正数，且满足

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{10.1}$$

问题。寻找一组数 x_{ij}，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$，使目标函数

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \tag{10.2}$$

达到极小，其中x_{ij}满足下面的约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n \tag{10.3}$$

与 $$x_{ij} \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{10.4}$$

(10.3) 式中共有 mn 个变数，容易证明共有 $m+n-1$ 个方程是线性独立的。因此，在 (10.3) 式中有 $m+n-1$ 个未知数 y_1，…，y_{m+n-1}，可以唯一地用其余未知数 x_1，…，$x_{mn-m-n+1}$ 表示如下:

$$y_i = k_i + \sum_{j=1}^{mn-m-n+1} \varepsilon_{ij} x_j,\ 1 \leqslant i \leqslant m+n-1. \tag{10.5}$$

未知数 y_1，…，y_{m+n-1} 称为**消去变数**，而 x_1，…，$x_{mn-m-n+1}$ 称为**留下变数**。若

$$k_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m+n-1,$$

则$\{y_1, \cdots, y_{m+n-1}\}$称为**一组正消去变数**，因此，

$$y_i = k_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m+n-1,$$
$$x_j = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant mn-m-n+1$$

为一个适合于（10.3）式与（10.4）式的解，它称为一个**允许解**。若 F 在$\bar{x}$达到极小，则允许解$\bar{x}$称为**最优解**。

事实上，最小元素法可以用来寻求一组正消去变数。考虑$(m+1)\times(n+1)$矩阵

$$D = \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $C = [c_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n}$，

$$A = [a_1 \cdots a_m]^T \text{及} \ B = [b_1 \cdots b_n].$$

命 $c_{i_0j_0} = \underset{C}{\mathrm{MIN}}\, c_{ij}$。不失一般性，可以假定 $a_{i_0} \leqslant b_{j_0}$。则

$$x_{i_0j_0} = a_{i_0} - x_{i_01} - \cdots - x_{i_0j_0-1} - x_{i_0j_0+1} - \cdots - x_{i_0n}.$$

其次，考虑$m\times(n+1)$矩阵

$$D_1 = \begin{bmatrix} C_1 & A_1 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix},$$

此处 C_1 与 A_1 分别由 C 与 A 中去掉第 i_0 行得出，B_1 为将 B 的第 j_0 个表值 b_{j_0} 换成 $b_{j_0} - a_{i_0}$ 得出。

命 $C_{i_1j_1} = \underset{C}{\mathrm{MIN}}\, c_{ij}$。假定 $b_{j_1} < a_{i_1}$。则当 $j_1 \neq j_0$ 时，

$$x_{i_1j_1} = b_{j_1} - x_{1j_1} - \cdots - x_{i_1-1,\ j_1} - x_{i_1+1,\ j_1} - \cdots - x_{mj_1},$$

而当$j_1 = j_0$时，

$$\begin{aligned} x_{i_1j_1} = b_{j_0} - a_{i_0} - x_{1j_0} - \cdots - x_{i_0-1,\ j_0} - x_{i_0+1,\ j_0} - \cdots \\ - x_{i_1-1,\ j_0} - x_{i_1+1,\ j_0} - \cdots - x_{mj_0} + x_{i_01} + \cdots \\ + x_{i_0j_0-1} + x_{i_0j_0+1} + \cdots + x_{i_0n}. \end{aligned}$$

然后，再考虑$m\times n$矩阵

$$D_2=\begin{bmatrix} C_2 & A_2 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 C_2 与 B_2 分别由 C_1 与 B_1 中去掉第 j_1 列得出，A_2 为将 A_1 的表值 a_{i_1} 换成 $a_{i_1}-b_{j_1}$ 而得出。继续这一过程，并注意（10.1）式，我们得到一组含有 $m+n-1$ 个未知数的集合，它们均可以由留下变数表出，其常数项为非负的，即我们得出一组正消去变数。

§ 10.3 判别数

命 $X=\left[x_{ij}\right]_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n}$. X 中一条闭折线，其边平行于“座标轴”（在水平与垂直间交替），其顶点位于某些 x_{ij}，X 的每一行与每一列至多只包含一条边，称为 X 的**一条闭路**。例如 $x_{21}x_{23}x_{13}x_{12}x_{32}x_{31}x_{21}$ 即为一条闭路。

定理 10.1　X 的 $m+n-1$ 个元素 y_i（$1\leqslant i\leqslant m+n-1$）的一个集合 Y，构成一个消去变数组的充分必要条件为不存在一条其顶点属于 Y 的 X 的闭路。

证　1）假定 $Y=\{y_i:\ 1\leqslant i\leqslant m+n-1\}$ 为一组消去变数，并存在一条其顶点在 Y 内，例如 $y_1y_2\cdots y_{2r}y_1$，的 X 的闭路。假定这些未知数用留下变数表示的表达式为

$$y_i=k_i+\sum_{i=1}^{mn-m-n+1}\varepsilon_{ij}x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant 2r.$$

则它们可以换成

$$y_i=k_i+\sum_{i=1}^{mn-m-n+1}\varepsilon_{ij}x_j+(-1)^i x_1,\quad 1\leqslant i\leqslant 2r.$$

这就是说，消去变数 y_1，…，y_{m+n-1} 的表达式不是唯一的，此为矛盾。因此，不存在其顶点属于 Y 的 X 的一条闭路。

2) 假定不存在其顶点属于 $Y=\{y_i: 1\leqslant i\leqslant m+n-1\}$ 的 X 的一条闭路。现在证明 Y 是一组消去变量。若 X 有一行（或一列）仅有一个元素属于 Y，则这个元素的表达式可以由（10.3）式的一个方程求得。例如，若 X 的第一行含有这样一个元素 x_{1j}，则

$$x_{1j}=a_1-x_{11}-\cdots-x_{1,j-1}-x_{1,j+1}-\cdots-x_{1n}. \qquad (10.6)$$

具有这个性质的 Y 的元素的集合记为 Y_1。若 X 的一行（或一列）中除一个元素外，Y 的其余元素都属于 Y_1，则这个除外的元素的表达式，可以借助于（10.3）的一个方程及某些 Y_1 的元素的表达式求出。例如，若 X 的第一行有这样一个例外的元素 x_{1j}，则 x_{1j} 的表达式可以由（10.6）式中将其右端属于 Y_1 的表达式代入（10.6）式而得到。具有上述性质的 Y 的元素记为 Y_2。继续这一过程，若 Y 的所有元素的表达式均已得到，则命题已成立。事实上，由于 Y 的元素的表达式是用（10.3）式中 $m+n-1$ 个方程得到的，所以它们是唯一的。因此，Y 是一组消去变数。

若有 $y_{s_1}\in Y$，它的表达式不能由上述方法得到，则显然在 y_{s_1} 所在行中还能找出具有同样性质的 Y 的另一个元素 y_{s_2}。同理，在 y_{s_2} 所在的同一列中，还能找到具有同样性质的 Y 的一个元素 y_{s_3}。把这个列同 y_{s_2} 连系起来。继续这个过程，我们得到这些行与列的有关贯 y_{s_1}，y_{s_2}，y_{s_3}，…。由于仅有 $m+n$ 个行与列，所以第一个 y_{s_i} 相关的行或列，即前面的 y_{s_j}。我们得到其顶点属于 Y 的一条闭路

$$y_{s_i}y_{s_{j+1}}\cdots y_{s_{i-1}}y_{s_i}.$$

此为矛盾，定理证完。 □

命 Y 为由 X 的 $m+n-1$ 个元素的一个集合。考虑方程组

$$c_i + d_j = c_{ij}, \tag{10.7}$$

此处 $x_{ij} \in Y$。方程组共有 $m+n-1$ 个方程，$m+n$ 个未知数。任给一个 c_{i_0}（或 d_{j_0}），若 (10.7) 式有唯一的解，则称 Y **有判别数**。

引理 10.1 假定在座标平面上有 r 个格子点，不存在以其中某些格子点为顶点的闭路。过每一格子点，分别作两条直线平行于 x— 轴与 y— 轴。则至少可作 $r+1$ 条不同的直线。

证 若 $r=1$，则我们可作两条直线，故引理成立。假定引理对于 $r=k$ 成立，此处 $k \geq 1$。我们现在来证明引理对于 $r=k+1$ 亦成立。假定最多只有 $k+1$ 条不同的直线过这 $k+1$ 个格子点。则必存在一条直线，它仅过这些格子点中的一个，否则就会存在以某些这种格子点为顶点的一条闭路，这与假设矛盾。去掉这个点与过它的直线，则过剩下的 k 个点最多只有 k 条直线。这与归纳法假定相矛盾。引理证完。 □

定理 10.2 Y 有判别数的充分必要条件为 X 中不存在其顶点属于 Y 的一条闭路。

证 1) 假定 Y 有判别数并在 X 中存在一条其顶点属于 Y 的闭路，如

$$x_{i_0j_0}\, x_{i_0j_1}\, x_{i_1j_1} \cdots x_{i_{k-1}j_{k-1}}\, x_{i_{k-1}j_0}\, x_{i_0j_0}.$$

考虑方程组

$$\begin{aligned} c_{i_0} + d_{j_0} &= c_{i_0j_0}, \\ c_{i_0} + d_{j_1} &= c_{i_0j_1}, \\ c_{i_1} + d_{j_1} &= c_{i_1j_1}, \\ &\cdots \\ c_{i_{k-1}} + d_{j_0} &= c_{i_{k-1}j_0} \end{aligned} \tag{10.8}$$

对应于这些顶点。由于

$$c_{i_0}+d_{j_0}=(c_{i_0}+d_{j_1})-(c_{i_1}+d_{j_1})+\cdots$$
$$-(c_{i_{k-1}}+d_{j_{k-1}})+(c_{j_{k-1}}+d_{j_0}),$$

所以在 (10.8) 式中最多只有 $2k-1$ 个独立方程，而 (10.7) 式中的独立方程个数最多为 $m+n-2$。但 (10.7) 式中有 $m+n$ 个未知数，因此，给予 c_i (或 d_j) 之后，不可能唯一确定 (10.7) 式中剩下的变数。此为矛盾，因此不存在其顶点属于 Y 的一条闭路。

2) 假定不存在其顶点属于 Y 的一条闭路。从 Y 的任意一点 $x_{i_0j_0}$ 出发，则给定 c_{i_0} 值，可以由方程

$$c_{i_0}+d_{j_0}=c_{i_0j_0}$$

唯一确定d_{j_0}。若

$$x_{i_0j_1},\ \cdots,\ x_{i_0j_p}\text{与}x_{i_1j_0},\ \cdots,\ x_{i_qj_0}$$

为 Y 的位于 X 的第 i_0 行与第 j_0 列上的元素，则 c_{i_s} $(1\leqslant s\leqslant q)$ 与 d_{j_t} $(1\leqslant t\leqslant p)$ 可以唯一地由方程

$$c_{i_s}+d_{j_0}=c_{i_sj_0},\quad 1\leqslant s\leqslant q,$$
$$c_{i_0}+d_{j_t}=c_{i_0j_t},\quad 1\leqslant t\leqslant p$$

确定。考虑 Y 位于 X 的第 i_s 行或第 j_t 列的元素，此处 $1\leqslant s\leqslant q$，$1\leqslant t\leqslant p$。对应于每一个元素，用同样的方法可以确定一个 c_i (或 d_j) 。继续这一过程，若 Y 没有判别数，则下列两种情况之一必须出现。

a) 对于给出 c_{i_k} 与 $x_{i_kj_l}\in Y$，假定 d_{j_l} 已经由对应于 Y 的元素 $x_{i_{k_1}j_l}$ 的方程决定了。即不再需要方程

$$c_{i_k}+d_{j_l}=c_{i_kj_l}.$$

于是我们可以找到用来确定 c_{i_k} 与 d_{j_l} 的 $x_{i_kj_l}$ 与 $x_{i_{k_1}j_l}$，然后又可以找到用来确定 $c_{i_{k_1}}$ 与 $d_{j_{l_1}}$ 的 $x_{i_{k_1}j_l}$ 与 $x_{i_{k_2}j_{l_1}}$，等等，最

后找到用来确定 $c_{i_{k_n}}$ 与 $d_{j_{l_m}}$ 的 $x_{i_{k_n}j_0}$ 与 $x_{i_0j_{l_m}}$。因此我们得到一条其顶点属于 Y 的闭路，即

$$x_{i_0j_0}\,x_{i_0j_{l_m}}\cdots x_{i_kj_l}\cdots x_{i_{k_n}j_0}\,x_{i_0j_0}.$$

此为矛盾。

b）假定上述步骤在某一步终止了，即在决定了 c_{i_0}，…，c_{i_k} 与 d_{j_0}，…，d_{j_l} 是判别数之后，已不能再决定 c_i 与 d_i 了。命 $(i,\ j)$ 为 x_{ij} 的座标。则经过 X 的每一点，我们可以画两条直线分别平行于 x— 轴与 y— 轴，由引理 10.1 可知，通过 Y 中用来决定 c_{i_0}，…，c_{i_k}，d_{j_0}，…，d_{j_l} 的点至少可作 $k+l+2$ 条不同的直线，对于通过 Y 剩下的点，至少可作 $m+n-k-l-1$ 条不同的直线。因为上述步骤已中断，所以这两组直线是互不相同的。故通过 Y 所有的点至少有 $m+n+1$ 条不同的直线。但通过 X 所有的点仅有 $m+n$ 条直线，此为矛盾。定理证完。 □

由定理10.1与10.2，立即得出：

定理 10.3　Y 为一组消去变数的充分必要条件为 Y 有判别数。

§ 10.4　一个最优解的判别法

命 y_1，…，y_{m+n-1} 为一组正消去变数，其表达式为（10.5）式。将（10.5）式代入（10.2）式得

$$F(\overline{x})=M+\sum_{j=1}^{mn-m-n+1}\lambda_j x_j.$$

无向量 λ_j 称为 x_j **对应于消去变数** y_1，…，y_{m+n-1} 的**特征**

数。

定理 10.4　若 $\lambda_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant mn-m-n+1)$，则允许解即为最优解。

证　对于允许解

$$\vec{x}_0:\quad y_i = k_i (1 \leqslant i \leqslant m+n-1),$$
$$x_j = 0\ (1 \leqslant j \leqslant mn-m-n+1),$$

我们有

$$F(\vec{x}_0) = M.$$

另一方面，由 $\lambda_j \geqslant 0$ 与 $x_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant mn-m-n+1)$ 可知

$$F(\vec{x}) \geqslant M,$$

所以，$\vec{x}_0$是一个最优解。定理证完。 □

§ 10.5　特征数

命Y为一组消去变数。

引理 10.2　在 X 中，对任何留下变数 $x_{i_0j_0}$，皆存在通过 $x_{i_0j_0}$ 的唯一的闭路，其余下的顶点都是消去变数。

证　1) 把第 i_0 行和变数 $x_{i_0j_0}$ 连系起来。考虑方程

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i_0t} = a_{i_0}.$$

将消去变数的表达式 (10.5) 代入 (10.3) 式的任何方程，我们总能得到所有的项均为零的一个表达式，所以在 x_{i_01}，…，$x_{i_0j_0-1}$，$x_{i_0j_0+1}$，…，x_{i_0n} 中，至少有一个消去变数，比如说 $x_{i_0j_1}$，其表达式 (10.5) 中 $x_{i_0j_0}$ 有非零系数。把第 j_1 列和变数 $x_{i_0j_1}$ 连系起来。再考虑方程

$$\sum_{s=1}^{m} x_{sj_1} = b_{j_1}.$$

用同样的论证，在 x_{1j_1}，…，$x_{i_0-1j_1}$，$x_{i_0+1j_1}$，…，x_{mj_1} 中，必定有另一个消去变数，比如说 $x_{i_1j_1}$，其表达式（10.5）中 $x_{i_0j_0}$ 有非零系数。把第 i_1 行与变数 $x_{i_1j_1}$ 连系起来。继续这一过程，我们得到与其行或列相连系的消去变数（$x_{i_0j_0}$ 除外）贯

$$x_{i_0j_0}, \ x_{i_0j_1}, \ x_{i_1j_1}, \ x_{i_1j_2} \cdots \tag{10.9}$$

由于总共只有 $m+n-1$ 个消去变数，所以，在这个贯中将有第一个消去变数，比如说 x_{pq}，将出现下述两种情况之一。

a）消去变数 x_{pq} 有相伴的列 j_0（事实上，像这样的 x_{pq} 对某些 s 即 $x_{i_sj_0}$）。那么，我们有其顶点除 $x_{i_0j_0}$ 外都是消去变数的闭路

$$x_{i_0j_0} x_{i_0j_1} \cdots x_{i_sj_0} x_{i_0j_0}. \tag{10.10}$$

b）与 x_{pq} 相连系的行或列，已经与此贯中前面的元素相连系。比如说 $x_{pq}=x_{i_sj_s}$，有相伴的行 i_s，而第 i_s 行已经与 $x_{i_tj_t}$ 相连系，此处 $t<s$。我们有其顶点都是消去变数的闭路

$$x_{i_sj_s} x_{i_tj_{t+1}} \cdots x_{i_{s-1}j_s} x_{i_sj_s}.$$

这与定理 10.1 相矛盾，所以，我们必定有情况 a）。

2）假定过 $x_{i_0j_0}$ 有两条不同的闭路 Z 与 Z_1，它们的其它顶点都是消去变数。我们将表明，过对应于 Z 与 Z_1 顶点的格子点作水平线与垂直线，有多少线至少就有多少格子点。由引理 10.1 看来，存在一条其顶点为 $Z \cup Z_1$ 中，也在 Y 中的消去变数的闭路。这与（定理 10.1）Y 是一组消去变数的事实相矛盾。

假定除 $x_{i_0j_0}$ 外，Z 包含 r 个消去变数。由于过对应于 Z 中的顶点的 $r+1$ 个格子点，Z 是一条正好有 $r+1$ 条水平与垂直线的闭路，因此，过对应于 Z 中顶点都是消去变数的 r 个格子点，正好有 $r+1$ 条水平与垂直线。用此作为一个起点，我们可以构成所有对应于 $Z \cup Z_1$ 中消去变数的格子点的一个集合，这与以在 $x_{i_0j_0}$ 后第一个消去变数为起点的，且由横截于 Z_1 的水平线与垂直线的对应集合一样。每次，消去变数都不是在 Z 中相遇，最多将有一条新的直线通过对应以前没有出现过的格子点。现在，观察到最后的在 Z_1 中且不在 Z 中的顶点，将不构成一条新的直线，因此，至少有象直线那么多的格子点。引理证完。 □

引理 10.3 除那些过 $x_{i_0j_0}$ 的闭路的顶点外，任何消去变数的表达式 (10.5) 中，均不出现留下变数 $x_{i_0j_0}$。

证 假定引理不成立，则存在一个消去变数 y_0，它不是上述过 $x_{i_0j_0}$ 的闭路的顶点，而其表达式 (10.5) 中 $x_{i_0j_0}$ 的系数非零。与引理 10.2 的证明相类似，我们可以证明，存在一条闭路 Z，它以 y_0 为一个顶点，而且下述情形之一出现：

1) Z的所有顶点都是消去变数。

2) 除$x_{i_0j_0}$外，Z的所有顶点都是消去变数。

情形 1) 与定理 10.1 相矛盾，情形 2) 与引理 10.2 相矛盾。引理证完。 □

定理 10.4 命 c_1，…，c_m 与 d_1，…，d_n 为消去变数组 $\{y_1, y_2, \cdots, y_{m+n-1})$ 的一组判别数。则留下变数 $x_{i_0j_0}$ 的特征数 $\lambda_{i_0j_0}$ 满足

$$\lambda_{i_0j_0} = c_{i_0j_0} - c_{i_0} - d_{j_0}.$$

证 由引理 10.2 可知，存在唯一的上述过 $x_{i_0j_0}$ 的闭

路（10.10）。删去相关方程

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} = b_{j_0},$$

运用引理10.3，我们得出$x_{i_0j_1}$的表达式

$$x_{i_0j_1} = -x_{i_0j_0} + \cdots$$

将表达式（10.5）代入方程

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij_1} = b_{j_1},$$

我们得到一个恒等式，故由引理10.3可知

$$x_{i_1j_1} = x_{i_0j_0} + \cdots$$

同理，我们可以证明$x_{i_1j_2}$，$x_{i_2j_2}$，…的表达式中，$x_{i_0j_0}$的系数交替地等于 -1 与 $+1$。因此，将（10.5）式代入（10.3）式，我们得到$x_{i_0j_0}$的特征数的表达式如下：

$$\begin{aligned}\lambda_{i_0j_0} &= c'_{i_0j_0} - c_{i_0j_1} + c_{i_1j_1} - \cdots - c_{i_sj_0} \\ &= c_{i_0j_0} - (c_{i_0} + d_{j_1}) + (c_{i_1} + d_{j_1}) - \cdots - (c_{i_s} + d_{j_0}) \\ &= c_{i_0j_0} - c_{i_0} - d_{j_0}\end{aligned}$$

定理证完。 □

附记 作为一个系，由定理的证明可以推出表达式（10.5）中的ε_{ij}等于0，$+1$或-1。

§10.6 迭代

若有一个留下变数，比如说$x_j = x_{i_0j_0}$，它的特征数$\lambda_j = \lambda_{i_0j_0} < 0$，则正消去变数组需依下法加以更换。命（10.10）为X中过$x_{i_0j_0}$的唯一闭路，它的顶点除$x_{i_0j_0}$外

都是消去变数。则由引理 10.3 可知，在（10.9）的奇顶点的表达式中，$x_{i_0 j_0}$ 的系数等于 -1，偶顶点等于 $+1$，即在 $x_{i_0 j_1}$，$x_{i_1 j_2}$，…，$x_{i_s j_0}$ 的表达式中，$x_{i_0 j_0}$ 的系数取值 -1，而在 $x_{i_1 j_1}$，$x_{i_2 j_2}$，…，$x_{i_s j_s}$ 的表达式中，$x_{i_0 j_0}$ 的系数取值 $+1$。在其它消去变数的表达式中，$x_{i_0 j_0}$ 都不出现。不失一般性，我们假定在 (10.10) 的诸奇顶点中，表达式

$$x_{i_l j_{l+1}} = k - x_{i_0 j_0} + \cdots \qquad (10.11)$$

有最小的常数项。定义 $x_{i_l j_{l+1}}$ 为一个留下变数，而 $x_{i_0 j_0}$ 为一个消去变数。其它的消去变数都不改变。则我们有一个新的消去变数组。$x_{i_0 j_0}$ 的表达式可以直接由 (10.11) 式导出，即

$$x_{i_0 j_0} = k - x_{i_l j_{l+1}} + \cdots \qquad (10.12)$$

将 (10.12) 式代入 (10.5) 式，则得其它消去变数的表达式。(10.10) 中的偶顶点的表达式的常数项都增加 k，而奇顶点的表达式的常数项都减少 k。其它消去变数的表达式都未变。因此，新的消去变数组仍是一个正消去变数组。将它对应的允许解代入 (10.2) 式，则 $F(x)$ 的值将减少下面的数

$$-k(c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + \cdots - c_{i_s j_0}) = -k\lambda_j.$$

命 $\sum' a_i$ 与 $\sum' b_j$ 分别表示 a_1，…，a_{m-1} 与 b_1，…，b_n 的某些元素的和。

引理 10.4 消去变数的表达式的常数项必为 [illegible] $\sum' a_i$ $-\sum' b_j$)。

证 任何消去变数组的表达式均可由（10.3）式的任何 $m+n-1$ 个方程求得。不失一般性，我们舍去方程

$$\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m.$$

消去变数的表达式可以由定理 10.1 证明中所示的步骤求

出。Y_1 的元素的表达式中的常数项为 a_i 或 b_j，Y_2 的元素的表达式中的常数项为

$$a_i-\sum{}'b_j \text{ 或 } b_j-\sum{}'a_i,$$

等等。引理证完。 □

若所有的 $\sum'a_i-\sum'b_j$ 项均不等于零，则经过一次迭代后，$F(\overline{x})$ 将减少一个正数

$$|\lambda_{i_0j_0}(\sum{}'a_i-\sum{}'b_j)|.$$

由于允许解的个数最多只有 C_{m+n-1}^{mn}，而每经一次迭代后，$F(\overline{x})$ 的值都是严格下降的。因此，经有限多次迭代，我们总能获得最优解。

若有 $\sum'a_i-\sum'b_j$ 一项等于零，则问题称为**退化**，可以用下面的摄动法来求解。命

$$\underset{\sum'a_i-\sum'b_j\neq 0}{\text{MIN}}|\sum{}'a_i-\sum{}'b_j|=(n+1)\delta.$$

命
$$b_j'=b_j+\delta,\ 1\leqslant j\leqslant n,$$
$$a_i'=a_i,\ 1\leqslant i\leqslant m-1 \text{ 及 } a_m'=a_m+n\delta.$$

则
$$\sum_{i=1}^m a_i'=\sum_{j=1}^n b_j'$$

及
$$\begin{aligned}\sum{}'a_i'-\sum{}'b_j'&=\sum{}'a_i-\sum{}'(b_j+\delta)\\&=\sum{}'a_i-\sum{}'b_j-k\delta\neq 0,\end{aligned}$$

此处$0\leqslant k<n+1$.

考虑新的问题：求 x_{ij}，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，使

$$G(\overline{x})=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \tag{10.13}$$

达到极小，此处诸x_{ij}满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a'_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b'_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

及 $$x_{ij} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

这个新的问题是非退化的。将一组消去变数的表达式代入（10.13）式，而将对应的老问题的表达式代入（10.2）式，我们看到留下变数的特征数都相同。因此，由新问题的一个最优解可以诱导出老问题的一个最优解。

附记 在实际使用时，往往不需要采用摄动法。

§ 10.7 线性规划

命 A 为一个 $m \times n$ 的实系数矩阵。命 $\vec{c}$ 与 $\vec{b}$ 分别表示实系数的 n 维与 m 维的行矢量。

问题 求一个n维矢量$\vec{x}$，使目标函数

$$\vec{c}\vec{x}^T \tag{10.14}$$

达到最小，此处$\vec{x}$满足约束条件

$$A\vec{x}^T = \vec{b}^T \tag{10.15}$$

及 $$\vec{x} \geqslant \vec{0}. \tag{10.16}$$

一般言之，（10.15）与（10.16）定义了一个多面体，而（10.14）为一个线性函数，因此，若$\vec{c}\vec{x}^T$在（10.15）与（10.16）中有一个极小主项，它总可以由多面体的顶点来达到。若（10.15）可以写成

$$\vec{y}^T = \vec{d}^T + B\vec{z}^T, \tag{10.17}$$

此处$\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m)$，$\vec{z} = (z_1, \cdots, z_{n-m})$，$B$是一个$m \times (n-m)$矩阵，而$\vec{d} = (d_1, \cdots, d_m)$为一个有非负分量的矢量，则$\vec{y}$称为一组正消去变数，而$\vec{z}$为一组留下变数，故得（10.15）与（10.16）的一组解。

$$\vec{y} = \vec{d}, \quad \vec{z} = \vec{0}. \tag{10.18}$$

这称为一个允许解。若$\vec{c}\vec{x}$达到极小，则允许解$\vec{x}$称为最优解。将（10.17）代入（10.14），得

$$\vec{c}\vec{x}^T = M + \sum \lambda_j z_j.$$

若所有的λ_j皆非负，则（10.18）为一个最优解。否则，若有一个$\lambda_j < 0$，则类似于运输问题，正消去变数组需更换为另一个正消去变数组，从而使目标函数$\vec{c}\vec{x}^T$的值有所下降。若问题是非退化的，则经有限多次迭代，即得最优解。否则，也可以用摄动法来处理。这就是熟知的线性规划中的单纯形方法。

参 考 文 献

〔1〕Dantzig, G.B.Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, N.J., 1963.

〔2〕Hitchcock, F.L.Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, J. of Math. Phy, 1941, 224–230.

〔3〕Kantorowitch, L.V.Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production, Pub. House of the Leningrad State University, 1939.

〔4〕万哲先与王元，物资调运工作中的数学方法，科学出版社，北京，1959.

〔5〕越民义、万哲先与王元等（编辑），线性规划的理论及应用，人民教育出版社，北京，1959.

英文版校订者注：除了最小元素法外，通常还用西北角法则（North West Corner Rule）、Vogel 逼近与 Russell 逼近等法则来求初始运输分配方案。判别数常称为对偶变量，而迭代常叫做转轴（pivoting）。消去变数常叫做基本变量，而留下变数常叫做非基本变量，允许解也叫做基本允许解。特征数是缩减成本。在许多论述线性规划与运输问题的教科书中，我们参考以下著作：

〔6〕Bazaraa, M.S. and J.J.Jarvis. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, Inc., 1977.

〔7〕Hillier F.S., and G.J.Lieberman. Introduction to Operations Research. 4–th ed., Holden–Day Inc., 1986.

第十一章　邮递员问题

§ 11.1　引言

每一天，邮递员都要从邮局出发，经过一些街道，投递与收集信件，然后再回到邮局．一个很自然的问题是：是否有办法决定一条路线，包括邮递员应走过的所有街道，而且总路程最短？大城市的垃圾车每天往返收集垃圾也是类似的问题．

邮递员需要走过的街道，可以看成是一个无向的联络图，其中街道拐角为结点，街道为线段．附着于一个结点的线段的个数称为**结点次数**．奇次数的结点称为奇点，反之称为**偶点**．例如，图 11.1 中，A、B、D 与 F 为奇点，而 C、E、G 与 H 为偶点．

Euler 曾经考虑过这样一个著名的问题：是否在给定的一张图上有这样一条路线，恰好通过图的每一线段一次，然后回到出发点？若这样的路径存在，则说图具有 Euler **路径**

或 Euler 旅行．显然，如果邮递员需走过的路径有 Euler 路径，则这是一条有最短路程的路径．Euler 在 1736 年证明过，一个图有 Euler 路径的充分且必要的条件为图的每一结点都是偶点．

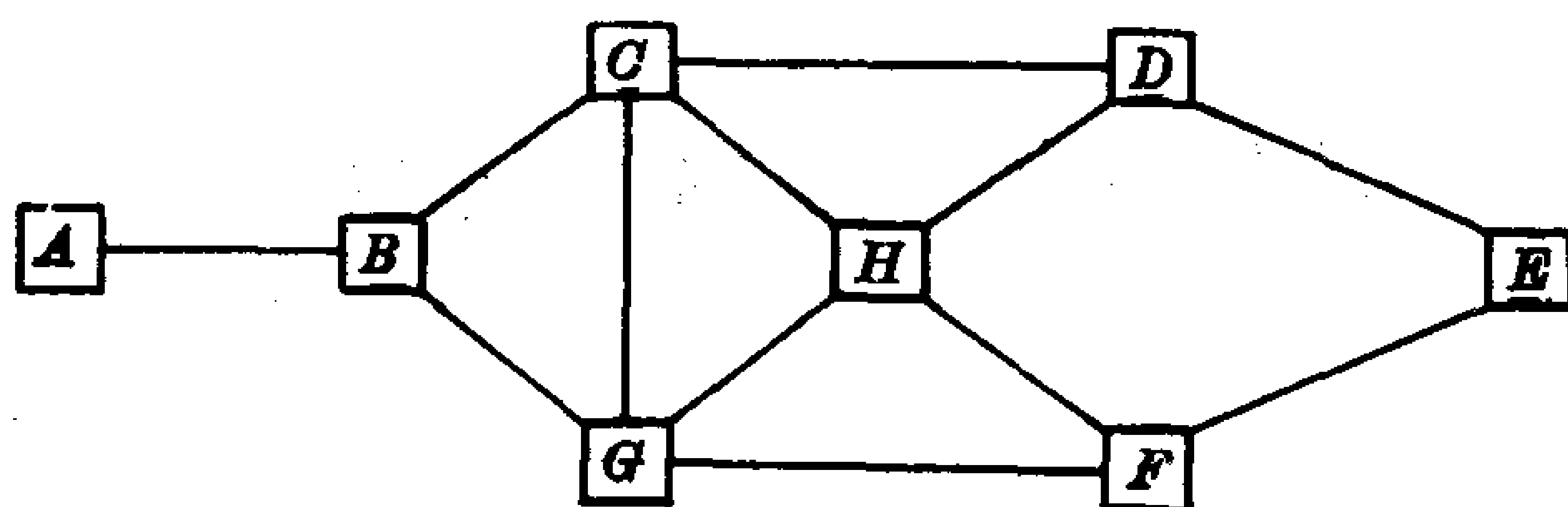


图 11.1

因此，若一个图的所有结点都是偶点，则就能得到一条最优路径．反之，对于具有一些奇点的任何图，可以将一些线段变成复线段，由此而得到的图形满足具有 Euler 路线的条件，例如，将所有线段都变成复线段即可．但有种种方法选择线段变成复线段，使得到的图形具有 Euler 路线．例如，使线段 AB、DE 与 EF 或线段 AB、DH 与 FH 变成复线，则所得的图 11.2 与图 11.3 都具有 Euler 路径．将线段的长度记在图 11.3 中线段的旁边．则图 11.2 中复线的总长度等于 5，而图 11.3 中复线的总长度为 3.

因此，若一个图有奇点，则问题归结为如何决定一组线段变成复线段，使得到的 Euler 路径有最小的复线总长？这就是邮递员面临的问题，即选择一条最短的路，使他走完应走的街道再回到邮局．

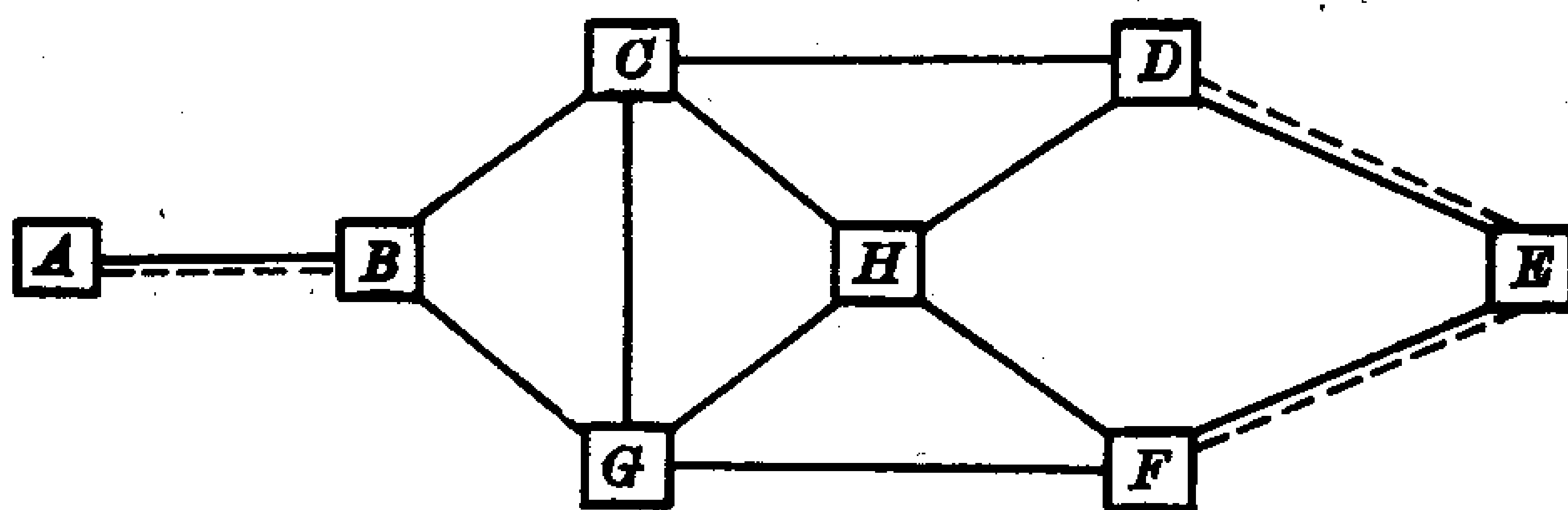


图 11.2

这个问题称为邮递员问题（外国文献上又称为中国邮递员问题），这是管梅谷在 1958 年受到运输问题图上作业法的启发而首先定义的．他证明了图中所得到的 Euler 路径有最短路程的充分且必要的条件为图中每一个圈上复线段的总长均不超过圈长之半（一个圈表示一条自己不相交的闭路，例如，图 11.1 中的 DEFH）．

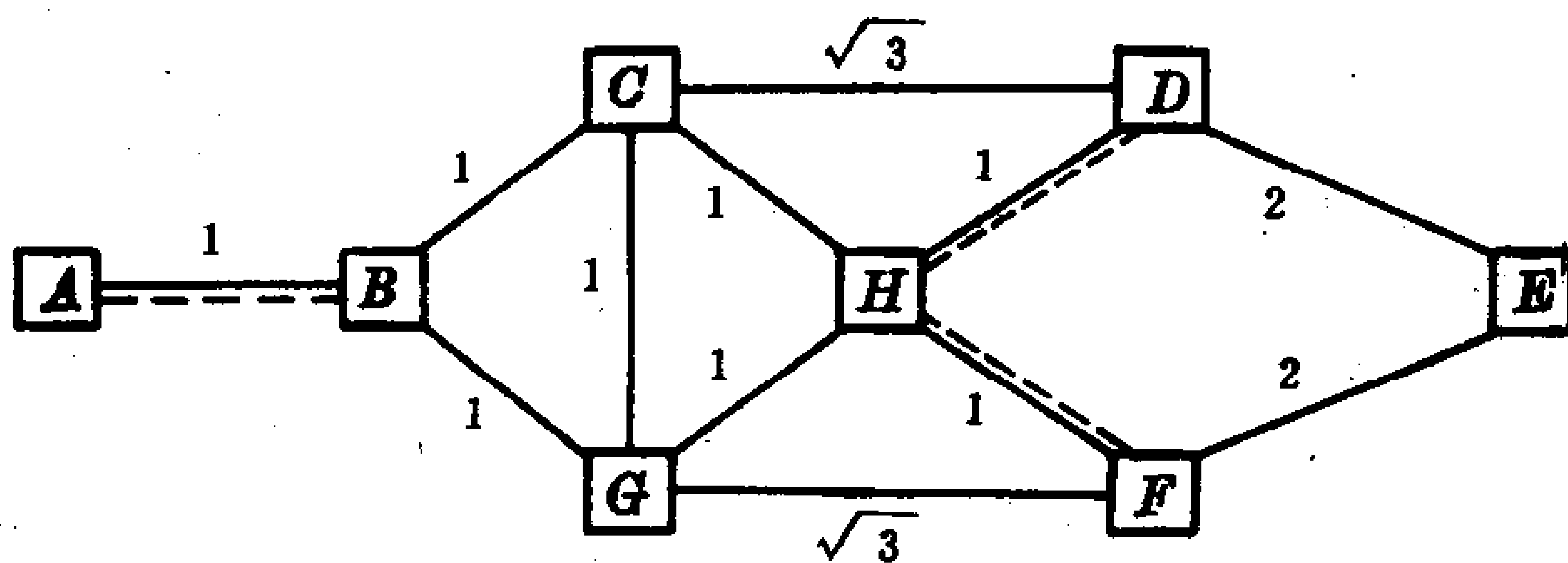


图 11.3

若图中一个圈 C 上复线段的总长超过圈 C 的长度之半，则我们可以将 C 上的复线段去掉，而将 C 上的单线段变成复线段．由此而得到的图仍有 Euler 路径，但是线段的总长度减

少了．由于对于任何给出的图，仅有有限多种方法选择线段集合使之变成复线，所以，经过有限多次的迭代，我们可以得到一个有 Euler 路径的图，其线段的总长最短．

但是，这个情形与运输问题的图上作业法相类似．若一个图中的圈的个数较多时，这个方法是不方便的．因此，需要更好的算法，在此我们就不讨论了．

§11.2 Euler 路径

定理 11.1 一个无向联络图有 Euler 路径的充分且必要的条件为图的所有结点都是偶点．

证 1）首先，我们来证明若图的所有结点都是偶点，则图有 Euler 路径．命 n 表示图的结点个数，若 $n=2$，就有 $2m$ 条线段附着在这两个结点上，比如说 A 与 B，则我们可以用 m 条线段由 A 走到 B，而由 B 回到 A 走另外的 m 条线段，因此，图有 Euler 路径．现在假定 $n>2$，而命题对于结点个数少于 n 的图成立．现在来证明，对于有 n 个结点的图，命题亦成立．对于一个给定的结点 A，假定附着于 A 的线段为 AB_1，…，AB_{2m}．去掉 $2m$ 条线段 AB_1，…，AB_{2m}，删去结点 A，并增加 m 条线段 B_1B_2，…，$B_{2m-1}B_{2m}$．于是我们得到具有 $n-1$ 个偶点的图，因此，由归纳法假定，这个图有 Euler 路程．由于沿线段 B_1B_2，B_3B_4，…，$B_{2m-1}B_{2m}$ 的路径，可以分别改为 B_1AB_2，B_3AB_4，…，$B_{2m-1}AB_{2m}$，所以，原来的图也有 Euler 路径，因此，由归纳法可知命题成立．

2）其次，我们来证明具有奇点的图一定没有 Euler 路径．

假定 A 是一个奇点，并且有 $2m+1$ 条线段附着于它．命 A 为起始点，显然不存在一条路径，正好走过每一线段一次而又回到 A．定理证完． □

§ 11.3　最优解的一个判别法

问题　给出任意无向联络图 G，求出一条路径，使其从一给定结点出发，经过每一条线段再回到出发点，使路径的总长最小．

若 G 的所有结点都是偶点，则由定理 11.1 可知 G 有 Euler 路径，它满足我们问题的要求．否则，必须选择一个线段集合，使这些线段变成复线段，由此而得到一个仅有偶点的图 F. F 称为 G 的**一个允许解**．线段总长最短的允许解称为 G 的**一个最优解**．如果在 F 的每个圈上复线段的总长均不超过圈长之半，则 F 称为**一个正则解**．

定理 11.2　G 的允许解是最优解的充分且必要条件是它是正则的．

证明定理 11.2 之前，我们先证明

引理 11.1　任何无向联络图 H 的奇点个数必为偶数．

证　若 H 有 s 个奇点 A_i $(i \leqslant i \leqslant s)$ 及 t 个偶点 B_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$，而附着于 A_i 与 B_j 的线段数目分别为 a_i 与 b_j，则

$$\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=1}^{t} b_j$$

等于 H 的线段的个数的一倍．因此

$$\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=1}^{t} b_j \equiv 0 \pmod 2$$

所以，S 是偶数．引理证完． □

定理 11.1 的证明 1）假定 G 的一个允许解 F_1 是非正则的，则 G 有一个圈 C，其中按得出的 F_1 在 C 上的复线段的总长 l，超过 C 的长度 L 之半，即

$$l > \frac{1}{2}L.$$

命 F_2 为仅在指向上不同于 F_1 的一个图，将 F_1 在 C 上的复线段，在 F_2 中变为单线段，C 上的其它线段，在 F_2 中变为复线段．则 F_2 仍为 G 的一个允许解，但 F_2 的线段的总长比 F_1 短了，它们的差等于

$$l - (L - l) = 2l - L.$$

因此，F_1 不是 G 的一个最优解．

2） 上面讲的由 F_1 到 F_2 改进的过程称为**允许解的迭代**．由于允许解的个数有限，而经过这种迭代之后，允许解的线段的总长是严格下降的，所以经过有限多次迭代之后，我们总可以得到一个正则解．若 G 只有一个正则解，则显然它就是最优解．否则，若 G 至少有两个正则解，则只要证明任意两个正则解，比如说 F 与 F' 的线段总长相等即可．由引理 11.1，我们可以假定 G 有 $2n$ 个奇点，而复线段构成 n 条不相交的路线，将奇点两两成对地连接起来．

假定 $n=1$，即 G 仅有两个奇点，比如说 A 与 B. 则我们得到一条闭路 Z，它由按 F 的从 A 到 B 的复线段及按 F' 的从 B 到 A 的复线段所组成．路线 Z 包含 F 与 F' 的一些共同复线及 Z 的余下线段构成一个不相交的圈的集合．在每个圈上，按 F 与 F' 的复线段的总长都相等，即等于圈长之半．因此，F 与 F' 的线段总长相等．

现在，假定 G 有 $2n$ 个奇点，此处 $n>1$，而命题对于奇点个数少于 $2n$ 的任意无向联络图成立．从 G 的一个奇点 A_1

出发，沿按 F 的复线段至 G 的一个奇点 B_1，再由 B_1 按 F' 的复线段至 G 的一个奇点 A_2，又按 F 的复线段由 A_2 至 G 的一个奇点 B_2，如此等等．我们得到 G 的奇点贯，
即　A_1，B_1，A_2，B_2，…．由于 G 仅有 $2n$ 个奇点，所以总存在两个结点 A_s 与 A_t，使

$$A_s = A_t,\ A_i \neq A_j\ (s \leqslant i < j < t \text{ 或 } s < i < j \leqslant t).$$

因此，我们得到一条闭路

$$Z:\ A_sB_s \cdots A_{t-1}B_{t-1}A_t\ (=A_s),$$

它由 F 与 F' 的一些公共线段及构成一个不相交的圈的集合的其余线段组成．与 $n=1$ 的情形类似，我们可以证明 Z 中 F 与 F' 的线段总长度相等．假定 G' 为将 G 中的路线 A_sB_s，$A_{s+1}B_{s+1}$，$A_{t+1}B_{t+1}$ 变成复线得到的，则 G' 为一个无向联络图，其中奇点 A_s，B_s，…，A_{t-1}，B_{t-1} 都变成偶点，而 G 的其它结点的次数均未变．因此，G' 是一个具有 $2n-2(t-s)$ 个奇点的图．命 F^* 为由 F' 删去按 F' 在 Z 上的复线段及按 F 在 Z 上的单线段变为复线段得出的图．则 F^* 也是 G 的一个允许解，而且其线段的总长与 F' 的线段总长相等．由于 F 与 F^* 都是 G' 的正则解，故由归纳法可知 F 与 F^* 有相等的线段总长，因此，F 与 F' 有相等的线段总长．由归纳法可知命题成立，故定理证完．□

参 考 文 献

〔1〕　管梅谷，奇偶点图上作业法，数学学报，10，3，1960，263–266.（也见中国数学 1，1962，273–277）．

英文版校订者注：以多项式时间运算邮递员问题的一个算法，在 1965 年

由 J.Edmonds 予以发展，实质上，它是加权匹配问题的 Edmonds 多项式时间算法的一个应用.对这些成果的介绍可参考

〔2〕 Lawler, E.L.Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.Holt, Rinehart and Winston, 1976.

对邮递员问题的某些近代成果，可参考

〔3〕 Lovdse, L. and M. D. Plummer. Matching Theory. Annals of Discrete Mathematics, 29, North Holland, 1986.

悼念华罗庚

华罗庚在1984年6月19日的一封信中写道:"但愿还能给我足够的时间,再回到大学去开设一门课程,让我重温我生命的黄金时光——四十年代."他未能如愿,1985年6月12日,他在东京讲学时,心脏病发作,猝然去世.辉煌的业绩,民族的英雄,他整个一生已经以他做过的一切,极好地做到了——阐发他的思想.

华罗庚的一生,充满了现代传奇人物的色彩.我不知道他出生的准确日期,即使出生的年份,也有某种程度的推断.他可能是1909年11月出生在中国江苏省金坛县的一个贫苦家庭里,最多受过九年的正规教育.可是,他年方十九,就写出了关于斯图谟(Sturm)定理的第一篇论文.不久,他成为北京清华大学的助教而至讲师.在以后几年中,他被中国文化基金会授予研究员职位.三十年代中期,诺伯特·威勒(Nobert Wiener)访问中国,他必定很欣赏华罗庚,他将两人的会见,向哈代(G.H.Hardy)作了报告,因而1936年,华罗庚抵达英国剑桥(Cambridge)大学进行了两年访问.这对年轻的华罗庚具有决定意义.他最早的一批论文,表明了他的数学兴趣涉及到广阔的领域.早在1934年,他就致力于华林(Waring)问题的研究,在剑桥期间,为后来的堆垒素数论的卓越贡献奠定了基础.这两年及其后在1945~1946年,他与苏联的

维诺格拉多夫（I.M.Vinogradov）一起度过的富有成效的三个月，以及1946～1950年在美国的五年，这是华罗庚在西方主要的数学中心工作的全部时间（普林斯顿 Princeton 三年，伊利诺伊 Illinois 二年），但他的成就十分惊人，在此时期，他继续在解析数论的研究中，作出重大的贡献，同时，他已着手对矩阵几何学、多复变数函数、有限域上不定方程论及辛群的自同构等进行研究.

华罗庚站在学者与教师的崇高的传统地位上，拥有威仪的相貌、迷人的个性和丰富的想象力. 他不仅是一位卓越的研究工作的领导者，而且是一位多层次教育的杰出导师. 他的一些学术论著，即使是很多年前写成的，现在仍在全世界被采用. 1950年，他最终返回中国后，也用来指导他的研究生. 这些书只是他撰写的论著很小的一部分，他用惊人的勤奋和炽烈的热情，教育他的人民运用数学. 后来，在国家进行工业化的运动中，他被请去担任某类数学疑难问题的咨询人. 华罗庚和一个科学家组成的小分队，跑遍中国各地，向工人讲述，如何运用他们的推导能力去解决大量的日常问题.无论在车间里的特殊问题研讨会上，还是工厂外的大型露天集会上，他用数学的精义纵论形形色色的问题.全世界没有一位数学家曾经象他这样做过.思索西方的相似人物，人们可能想到阿培拉德（Abelard）使巴黎神学院的大厅坐无虚席，或者约翰·韦斯里（John Wesley）在英国和美国的传道，但是，这种广泛折服于一位人民教师的影响的情况，也许是一种真正东方的现象，是我们这些西方人所不能完全理解的.《文选》[1] 末尾152篇论文的一览表，使我们得以初窥华罗庚咨询活动的规模. 即使其应用范围的一般领域，也多得在文中不胜枚举.华罗庚曾谈到将来有一天要出版这些论文的细节，但现在，恐怕再没有这个

机会了，我们只好对特意为《文选》而由中文翻译过来的“关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题”（与王元合作）一文表示满意了.

即使一位学术水平一般的人，也可以在他晚期发表的关于微分方程、运筹学和数值积分的课题中，看到华罗庚从50年代后期就起步的朝着数学应用的动向.但是，华罗庚最终的科学著作又完美地转回到理论方面. 比如，运用均匀分布和代数数论的思想，与王元合作，在多重积分的数值求积中，代替了蒙特卡罗(Monte Carlo)法. 他在我系的最后一次讲演是1984年，在挤满人群的大厅里，对数理经济学作了生动的演说.

在“文化大革命”的岁月里，华罗庚处境困难，他认为他能活过来，至少一部分还得归功于毛主席对他的个人保护. 尽管如此，他的许多论文和手稿还是被查抄并估计被毁了.“解冻”后，华罗庚被允许接受里文斯通（Livingston）教授的邀请，作为英国科学研究委员会的高级访问学者，访问了英国伯明翰(Birmingham）大学，随后，他又有机会访问了欧洲和美国. 就许多方面来说，这些访问是他充满传奇色彩的性格，在与外界隔绝30年后而渴望获得的个人的成功. 我们可以通过各地的华人团体以及所有各种政治信仰的人，都争先恐后地去会见他，那怕仅仅看他一眼，了解到他在国内获得的重要地位(中国的电视台制作了六集反映他早年生活的电视连续剧).他渴望重会他青年时代的数学同道，同时，他对他非常亲切地想再见一面的许多老友的去世也感到刺骨的伤感.

如果华罗庚曾经懊悔在他才华的高峰和思维敏锐的时候离开了美国的话，那么他后来重访西方时，他不能收回失落的时光，而他对自己祖国的献身是无条件的和坚定不移的. 1938年，他回到中国，一直到1945年，他都在云南省昆明市西南

联合大学任教授，这是由于日本侵略中国，沦陷了的几所大学组建起来的一所大学. 1949 年，中华人民共和国成立，第二年他又回到了大陆，从事于重建中国科学院数学研究所的工作. 1952年被任命为所长，在这个岗位上一直到 1984 年，同年由王元教授接任. 他还担任了多年中国科学院的副院长和在安徽省合肥市的中国科学技术大学的副校长. 1957 年，他的“多个复变数典型域上的调和分析”著作，得到了中国的自然科学一等奖. 1980 年他接受了法国南茜(Nancy)大学的荣誉博士学位，1983 年他接受了香港中文大学荣誉博士学位，1984 年他接受了美国伊利诺伊(Illinois)大学荣誉博士学位. 1982 年，他当选为美国科学院国外院士，1983 年，他当选为第三世界科学院院士，1985 年，他当选为德国巴伐利亚 (Bavaria) 科学院院士.

H.Halberstan

1) 《文选》指 1982 年斯普林格出版社出版的《华罗庚文选》，其中收集了华罗庚发表过的论文目录 150 篇，专著目录 10 本，科普读物目录 11 本.

译者注

怀念华罗庚

段学复

——天才和勤奋造就华罗庚成为一位伟大的数学家.

华罗庚于 1910 年 11 月 12 日出生在中国江苏省金坛县. 1926年他从金坛初级中学毕业后，到上海的一所职业学校学习不到一年，就由于生计困难而辍学. 他回到家乡帮他父亲照看一家小杂货铺，并在余暇自学数学. 他在科学杂志上发表的两篇关于方程论的论文，引起了北京清华大学数学系系主任熊庆来教授的尝识，1931 年秋季，让他担任了系的图书管理员. 由于他的卓越成就，随后几年，他被提升为半薪助教、助教，而至讲师. 1934 年，他成为中华文化教育基金会的研究员.

1932 年秋季，我考入清华，成为数学系的新生，有幸结识了华罗庚. 不久，我们成为挚友. 我们常常与从金坛来的其他学生一起晚餐，在校园内漫步，谈论数学和其它. 我从华罗庚谈及的如何学习数学中受益匪浅.

从 1932 年到 1936 年的四年中，华罗庚的才气和勤奋给了我强烈的印象. 在清华工作的日子里，他住着一个单间，寒暑假中，他回到金坛家中与妻子和两个孩子团聚: 那时，华罗庚

年轻，精力旺盛，每天紧张地学习数学十个小时以上．他早晨总是起得很早，抓紧早饭前的点滴时间，极其专心地工作．他很快就抓住了数学的精华．正如他在以后几年所说的那样，阅读大量的数学论著，并能把它们缩减成简明的要点是非常重要的．他大约用了一年半的时间，主要通过自学，掌握了全部基本的大学数学．当然，他也去听一些课，比如他与同学许宝騄、柯召与王竹溪在 1931 年秋季去旁听了熊庆来教授的复变数课，他们三人后来都成为数学或物理学的著名学者．华罗庚告诉我，他们在一起做分析(或“难以”分析)中的一些难题，进行友谊竞赛．华罗庚跟杨武之教授开始学习数论，从 1935 年起，他渐渐集中精力系统地学习了哈代——里特伍德——维诺格拉多夫(Hardy–Littlewood–Vinogradov)方法，即堆垒素数论，这是他以后曾作出了重大贡献的一个领域.在学校的日子里，他学习了英文，现在，他还能阅读法文与德文的数学书，比如，E.Goursat 的“高等数学分析”(“Cours d’Analyse methématique”)与 E.Landau 的“数论引论”(“Vorlesungen über Zahlentheorie”)．1935 ～ 1936 年，J.Hadamard 与 N.Wiener 访问清华并讲学，华罗庚听了他们的讲学．Hadamard 提请华罗庚去注意维诺格拉多夫的工作．华罗庚与当时系里的一位新助教徐贤修一起写了一篇关于复富氏分析的论文，Wiener 非常赞赏这篇论文．

在 Wiener 的推荐下，G.H.哈代 (G.H.Hardy) 邀请华罗庚访问剑桥大学，他在这里从 1936 年呆到 1938 年．在这两年中，他在解析数论上作出了突出的贡献．除此之外，他开始注意到抽象代数的绚丽的领域．这完全体现了华罗庚在开辟新的研究领域中科研累进的特色．由于抗日战争爆发以后，他渴望回到中国，华罗庚在剑桥没有再呆下去．

1938年秋季，华罗庚回到中国昆明，就任由清华大学、北京大学与南开大学组建的西南联合大学的正教授. 我们又在一起，我是他的助教. 1938～1939年，他根据 B.van der Waerden 的"近世代数"("Moderne Algebra I")，并通篇作了若干修改，就抽象代数开设了一门课程. 此外，他领导了一个有限群的讨论班，采用了新出版的 H.Zassenhaus 的"群论"("Lehrbuch der Gruppentheorie") 与 A.Speiser 的"有限阶群论(第三版)"("Die Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung (Dritte Auflage)")，以及 P.Hall 关于 p–群的基本论文(1934)作为参考文献. 樊𰻝、徐贤修和我都是其中的参加者. 我和华罗庚一起研究过 p–群，特别是其中的"记数"理论. 我们间富有成效的合作，一直给我留下愉快的回忆.

1940年，我离开昆明出国留学，起初在多伦多一年，后来在普林斯顿一直到1946年. 这段时期，我与华罗庚相互间经常通信.他当时住在离昆明市不太远的一个名叫黄土坡的小村里. 一次，在空袭时，华罗庚与闵嗣鹤躲到一个简易的防空掩体中，一枚炸弹落在了附近的地方，掩体坍了下来，他们被埋在落下的泥土里. 幸运的是他们被营救出来. 在这样极其困难的条件下，华罗庚与他的主要合作者闵嗣鹤一起，继续在数论方面得出了重要的结果. 1941年，他开始在多复变典型域的理论上进行系统的研究. 1943年4月，他的关于自守函数的两篇论文的手稿寄给了普林斯顿的 H.Weyl，在美国数学学报上发表. 人们发现 C.L.Siegel 与华罗庚差不多在同时研究着相同的理论. 华罗庚的第一篇论文，与 Siegel 早在1943年出版的"辛几何"("Symplectic Geometry") 不可避免的有着部分重复，然而，它们的重点是有所不同的. 在矩阵几何学的有关研究中，华罗庚也作出了极好的进展.1946年春天，我接到华

罗庚来信，他应苏联科学院数学研究所所长 I · M · 维诺格拉多夫的邀请，去苏联访问了三个月. 华罗庚现在的经典专论“堆垒素数论”就是 1947 年首先用俄文发表的，而直到 1952 年才译成中文(校订本)出版. 它还被译成了匈牙利文(1959)、德文(1959)与英文(1965). 1938～1946 年，华罗庚在昆明所做的数学工作是一个真正的奇迹.

1946 年 7 月，我从美国回到中国，而华罗庚携全家大约同时又去到美国. 我们在上海小聚了一段时间.

从 1946 年到 1948 年，华罗庚作为普林斯顿高级研究所的一个成员在那里工作，并在普林斯顿大学讲授数论. 从 1948 年到 1950 年，华罗庚在伊利诺伊大学任教授. 在这四年中，华罗庚在抽象代数上做出了几个非凡的与优美的结果，诸如体的半自同构理论，体上一维射影几何的基本理论，以及卡坦——伯劳勒——华定理 (Cartan−Brauer−Hua Theorem).在这些工作中，以有关问题中的深度洞察为基础，华罗庚成功地运用了直接代数方法. 同样，在体或环上典型群的自同构与结构的研究中，华罗庚的矩阵方法也成功地用于处理由 J.Dieudonné 留下的困难的低维情形.

早在 1950 年，中华人民共和国建立不久，怀着献身发展中国数学事业的强烈愿望，华罗庚全家回到北京，再次就任清华大学的教授. 1952 年，华罗庚被任命为中国科学院数学研究所所长，我到了北京大学工作. 自此以后，我们就不再在一个学校工作了，但是，我们有许多共同参与的数学活动，除了 1966～1976 年十年动乱外，我们时常见面.

华罗庚从 1951 年到 1983 年被选为中国数学学会理事长，这之后，又是五位荣誉理事长之一. 华罗庚还被任命为中国科学院数学物理学化学学部副主席，中国科学技术大学副校长，

中国科学院副院长等.

华罗庚 1950 年回国后，除了在数学研究上继续做出新的重大贡献外，他用了更多的精力去培养年青的中国数学家. 他领导了许多讨论班，并写了许多专著，特别在数论、典型群与多复变数函数方面，从这些讨论班的成员中，涌现出了许多优秀的学者，他们中间有数论的王元、陈景润，代数的万哲先，多复变函数的陆启铿、龚升. 1960 年后，华罗庚又在应用数学上开拓工作，诸如偏微分方法与数值分析，1965 年后，在工业应用上普及数学方法，特别是优选法和统筹方法. 华罗庚和他的小分队到过中国的大部分省分的许多工厂.

在数学文献中，华罗庚的许多卓越成就，包括定理、引理、方法、不等式、恒等式、算子等，都是以他的名字命名的. 在 70 年代末到 80 年代，华罗庚当选为美国科学院国外院士，第三世界科学院院士，德国巴伐利亚 (Bavarian) 科学院院士，并被授予法国南茜 (Nancy) 大学、香港中文大学、美国伊利诺伊大学的荣誉博士学位. 我不打算进一步再写他自 1950 年以来的数学工作，也不写他在这个时期在国内外的数学活动，这里只写我与他在 1984～1985 年中个人接触的一些事件.

1984 年 9 月，华罗庚应邀在 1984 年北京国际群论讨论会上作了题为“非负方阵与计划经济”的学术报告.这是他关于数理经济学的研究的一部分，1966 年前，他对此已经得出了系统的理论. 可惜的是在动乱年代，这些手稿都丢失了. 重写他的成果，特别是基本理论的证明，需要付出新的努力. 后来有一次他就此事作为一个例子谈到，他赞成在现时的环境下，对此课题宁可去做一个新的证明，要比去找回那丢失的旧的证明更好些.

1985年6月1日早晨，华罗庚飞往日本的前两天，我给他打了一个电话，祝他一路顺风，我们还愉快地谈了一些别的事. 当我从无线电里听到他在东京大学刚作完学术报告后，6月12日由于心脏病发作猝然去世的消息时，我完全震惊了. 华罗庚的最后谈话，概述了他自1950年以来在理论研究和数学普及方面所做的工作.

华罗庚把他的整个生命献给了数学. 他对数学理论的贡献极其广博，极其深厚，极其突出，并有着高度的影响. 他对数学方法应用的普及工作易为普通人民所接受，并具有很显著的效益. 他对在中国发展数学事业建立了卓越的功勋. 他的数学工作是不朽的. 他是当代一位伟大的数学家.

——本文译自"当代数学"82卷（1989年）.

纪念华罗庚先生

田方增

华罗庚先生离开我们快五年了．我们相信，随着时间的推移，人们正继续从他留下的精神的和事业的财富中受益，永远怀念着他．

我最近读了段学复先生写的“怀念华罗庚”一文①，感受很深．段先生1936年在清华大学数学系出任教职时，我是系里学生．抗日战争前，我没有直接受教于华先生，也没有什么其他接触．但同学们盛传华先生学识渊博，能力高强，倾向爱国进步．1940年秋，我从中学回到西南联大数学系工作，才有机会接触华先生，受其教益．

华先生自1950年下半年起，参与了筹办中国科学院数学研究所的工作并指导业务．1952年夏，研究所正式成立时出任所长，直到1985年夏他突然离开我们．这个过程很长，包括不同时期，华先生在所内外多方面有职务和工作，他主要致力于发展数学为社会主义祖国的广泛需要服务，同时，提高我国数学的地位．他善于安排跟他工作的人完成各自的工作，好似已洞察了一切，使你在完成他交办的事务中从没有感到未曾

①段学复写的“怀念华罗庚”（Memories of Loo-Keng Hua）一文，载《当代数学》（Contemporary Mathematics，Amer.Math.Soc.）第82卷，1～5页.本书已译出载入．　——译者注

料及的重要情况．他平易近人，能及时地了解你想什么．你若因工作想请问他什么，也可直截了当找他谈．在研究所和在西南联大时一样，上班时不同方面找他的人往往很多，但间歇时间里，他常以特有步伐走到其他房间找人谈谈．他的职务及社会活动繁多，在研究所内外凡遇到认识的、有着不同关系的人时，他会自然去接触，或打招呼，或互相交谈一点事，都用他那特有的敏捷痛快的方式进行，甚至对待公共场所接待处的服务人员也如此．华先生珍惜时间，讲求效率，也随时随地同样想到别人．华先生的这种风格是与他多年来在社会上亲自推广优选法等数学方法，从理论与实际、言与行中完全一致的．数学所内从事业务及行政管理的工作人员，只要跟他稍久都同有此感．我从 1950 年下半年起，在华先生直接领导下做着数学所内行政及有关学术组织中的一些工作．

华先生在贯彻科学研究的国家政策中，始终表现出科学家的那种认真务实精神，处事敏捷，讲求实际和效率，言行朴实，又渗透出高度的科学智慧．要更好地认识他的深远影响，还有待今后从多方面考察迄今数十年来我国数学事业的历程与成就．

在几次全国性数学学科规则、有计划学习外国先进事物及重大的国际合作交流中，华先生以公认的地位主持开展工作，这对立足于我国自己的学术基础及环境，力求先进，对解决不简单的认识问题起了不可代替的作用．在主持全国性数学界学术活动及共同的重大事项方面，也可见到类似情况，不一一列举．对与此有关的重要、具体的日常工作，他始终十分认真，注意沟通上下各方，例如将参加国家科委会议时做的详细笔记，留给我们参考．研究所开办以来，人民来信不断，多种多样，一般与所本身业务没有什么特别关系，但反映人民群众对

数学学习的期望．华先生名下直接收到的占绝大多数，对这些他都过问，不时会同所内同志从大堆来信中拣、分并组织人员回答，他自己也参与写回信.这虽是比较次要的所内事项，但也使我们见到他怎样认真务实、为人民服务和防止官僚主义，不尚空言而用自己的行为影响周围，回答外界．

所有上述说到的华先生的工作,特别在数学研究所内的领导工作令人深感实受之处,在他的最后几年中仍强烈地表现着．1979年上半年将原数学研究所分为数学、应用数学及系统科学三个研究所之议酝酿成熟．华先生在此之前十多年已设想如何发展应用数学，并且展开了有关的具体的业务活动．经过1977～1978年进行的全国学科规划讨论，最终实现了他为我国数学科学在科学院内完整的体系做出建树的宿愿．事实上，50年代早期，他就同意从自身条件出发，在数学所内为力学、计算数学及计算机科学工作打下始建的基础．随后，又在适当的时机积极支持力学及计算技术两个科学部门在科学院建所，同意调出骨干力量．1979年5月中，他应邀到英国讲学，临行前召集有关人员谈话，对一些与他负责范围内的有关事项(包括数学应用任务及数学会等)，做了确切嘱托．在留下的书面备忘录中有“我们是搞科学的，一切要依科学态度办事，党的原则是民主集中制，一切要照民主集中制办事.”等语．这次华先生出国工作约经半年多，他随时把在外的情况写信告诉国内，保持与国内联系，嘱咐一些应进行的工作．在信中，他结合在国外的感受及国内外数学的比较，认为我国数学定能加速前进，并抱极高信心.这期间他给很多同志写了信，我收到五封信．他是1979年12月31日返抵北京的．1980年1月3日一上班，他就来到原数学研究所全体人员所在的各办公室(北京中关村相距里许的两座楼内)，逐屋与大家亲切见面．这

个时期，原数学所已进入正式实施分所的后期. 分所后，他直接领导数学及应用数学两所，所外任务更重. 他那时已年逾七旬，仍到所及时处理要务，还有多方面繁重的活动. 大家知道他的身体在那些年已不很好，有时在办公室随身带着氧气袋，常被医生强迫休息疗养. 可是，他是呆不住的，往往稍见情况平稳，就出来照样工作. 这些给我极深印象.

40 年代在昆明时，我们都有这样的了解,就是他的注意力不限于自己正在工作着的专门领域. 在西南联大时，他遇上有人在他认为值得学习或工作的问题上去下功夫，他会主动与这人交谈. 例如，他告诉一个年青同事，E.H.Moore 的《General Analysis》可细读一下，那时他想着在代数数域上建立函数论；又如，当时系内外有人一起讨论 M.Stone 的《Linear Transformation in Hilbert Spaces》,华先生也注意此事,并在系内提到. 数学研究所建所早期，正当 Gelfand 的赋范环及 L.Schwartz 的广义函数工作传播开来，我们自己组织过有关的讨论班，他曾参加听和讨论. 这些事说明他对泛函分析也顺带注意. 事实上,他曾建议另一种处理广义函数的途径(见华罗庚《从单位圆谈起》第八讲，科学出版社). 还有许多他关心过并做出反映他的主要成就特色的基础理论的其他研究. 文革前，他在所内领导典型群、解析数论、结合及非结合代数(环)、多复变等讨论班，共有多次成系列的计划，都一一实行，并带领多人做着研究. 除讨论班外，他还倡导以体育的精神要求人磨练自己来提高做研究的功夫. 一种方式是举办"练拳园地". 他要求所内同志和他一起找题目，并在所内公布出来征求解，然后他还评阅或与人讨论得到的解法. 事实上，这也是考察及培养所内年青人的一个方面. 在这些活动中，也象在昆明那时对待年青人一样，总要逐人过问，抓紧. 他爱护学

生就是严要求，事实一再证明，这是真正有效的. 至于他晚年还以更大精力为了数学的应用，为了从事经济建设事业及宣传普及做了大量切合实际又富启发性，有巨大社会效益的工作，更是国内上下熟知的. 正是在这个一生愿望将最好地得偿的时刻，带着已全面呈现的伟大精神和力量，并时刻准备贡献一切，华先生应邀到日本讲学和交流经验. 一生顽强奋斗走到前面的人，竟在邻国讲台工作到最后而离开了我们，时为 1985 年 6 月 12 日. 大家感到的震撼是难以用语言表达的. 为了我国的伟大事业，为了我国数学界，回忆华先生，就是要向他再学习. 但我只是提及很少一部分情况. 在许多特定领域，尤其是多方面的专门学术方面，华先生的业绩还待别人今后做出全面深刻的介绍.

所有这一切都证明段先生写的回忆文章的附标题：天才和勤奋造就华罗庚成为一位伟大的数学家.

1990 年 4 月 2 日